Сферы

С Ф Е Р Ы

МАТЕМАТИКА

Арифметика
Геометрия

6

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФГОС

СФЕРЫ

Математика

Арифметика
Геометрия

6 класс

Учебник
для общеобразовательных
организаций
с приложением
на электронном носителе

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

3-е издание

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2014

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М34

Серия «Сферы» основана в 2003 году

Руководители проекта:
чл.-корр. РАО, д-р пед. наук ***А.М. Кондаков***,
чл.-корр. РАО, д-р геогр. наук ***В.П. Дронов***

Линия учебно-методических комплексов «Сферы» по математике

Авторы: канд. пед. наук ***Е.А. Бунимович***,
канд. пед. наук ***Л.В. Кузнецова***, канд. пед. наук ***С.С. Минаева***,
канд. пед. наук ***Л.О. Рослова***, канд. пед. наук ***С.Б. Суворова***

На учебник получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106-5215/592 от 14.10.2011), **педагогической** (заключения РАО № 01-5/7д-333 от 17.10.2011 и № 278 от 29.01.2014) и **общественной** (заключение РКС № 310 от 07.02.2014 г.) экспертиз.

Учебник предназначен для работы в классе

Математика. Арифметика. Геометрия. 6 класс : учеб. для общеоб-
М34 разоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева и др.]. — 3-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 240 с. : ил. — (Сферы). — ISBN 978-5-09-033042-8.

Данный учебник продолжает линию учебно-методических комплексов «Сферы» по математике.

Издание подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования и освещает вопросы курса математики 6 класса. Содержательно материал учебника направлен на продолжение формирования центральных математических понятий (число, величина, геометрическая фигура), обеспечивающих преемственность и перспективность математического образования школьников. При его создании использованы концептуальные идеи учебника «Математика, 6» под редакцией Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина. Главными особенностями данного учебника являются фиксированный в тематических разворотах формат, лаконичность и жёсткая структурированность текста, разнообразный иллюстративный ряд. Использование электронного приложения к учебнику позволит значительно расширить информацию (текстовую и визуальную) и научиться применять её при решении разнообразных математических задач.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-09-033042-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

По библейскому преданию, Вавилонскую башню людям так и не удалось достроить, потому что они говорили на разных языках и не понимали друг друга. И сегодня в мире тысячи разных языков, и люди часто не могут понять друг друга, найти общий язык. Но есть один особый язык, на котором должны уметь говорить все люди, в любой стране, который учат во всех школах мира, — это язык математики.

Чем бы вы ни решили заниматься в жизни, какую бы профессию ни выбрали, вам не обойтись без математики, её языка, правил и методов. Но ещё важнее то, что математика учит умению рассуждать, анализировать, доказывать, отличать истинное от ложного, искать пути решения и делать выводы, развивает ум, логику, мышление. Не случайно великий художник, учёный, изобретатель Леонардо да Винчи утверждал, что «никакой достоверности нет в том, что не имеет связи с математикой».

Математику, математический язык, строгий и красивый, мы и продолжим изучать в 6 классе. Вы узнаете, из чего состоит алфавит математического языка, как строятся в нём слова и предложения, как осуществляется перевод с русского языка на математический и обратно. Вы узнаете много нового, интересного и полезного и о том, с чем вы уже знакомились на уроках математики, — о целых и дробных числах, геометрических фигурах и их свойствах, и о многом другом.

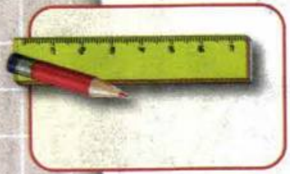
Надёжным помощником в изучении математики в 6 классе станет для вас учебный комплекс «Сферы». Вы знакомы с этим комплексом по 5 классу и уже хорошо знаете, как он устроен, как выделяется в учебнике самое важное, то, что необходимо запомнить, как обозначены задачки попроще и посложнее, где найти образцы решений и как подводить итоги изучения каждой главы, как узнать, хорошо ли вы всё усвоили, поняли, осмыслили и запомнили. Поупражняться в решении задач вам помогут «Задачник» и «Тетрадь-тренажёр», а проверить ваши знания поможет «Тетрадь-экзаменатор». Электронное приложение к учебнику позволит использовать все возможности компьютера для того, чтобы освоение математики стало ещё ярче, интересней, разнообразней и увлекательней.

РУБРИКИ НА СТРАНИЦАХ УЧЕБНИКА

На страницах учебника вы увидите специальные знаки, которые помогут вам в работе с текстом.

«ВНИМАНИЕ!» Так выделяется утверждение, которое нужно запомнить.

«В ФОКУСЕ». Важная деталь, на которую полезно обратить внимание.



«ЧИТАЕМ И ДЕЛАЕМ». Читайте этот фрагмент текста с карандашом в руке, т. е. делайте по шагам то, что описано в учебнике.

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ». Небольшой фрагмент на полях, который содержит дополнительную информацию.

«ЗАПИСЫВАЕМ РЕШЕНИЕ». Образцы записи решений, которым можно следовать.

«КНОПКА». Содержит полезный справочный материал.

23 Так обозначены упражнения полегче.

24 Так обозначены упражнения потруднее.

глава 1

ДРОБИ И ПРОЦЕНТЫ

- ЧТО МЫ ЗНАЕМ О ДРОБЯХ
- ВЫЧИСЛЕНИЯ С ДРОБЯМИ
- ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ДРОБИ
- ЧТО ТАКОЕ ПРОЦЕНТ
- СТОЛБЧАТЫЕ И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

ИНТЕРЕСНО

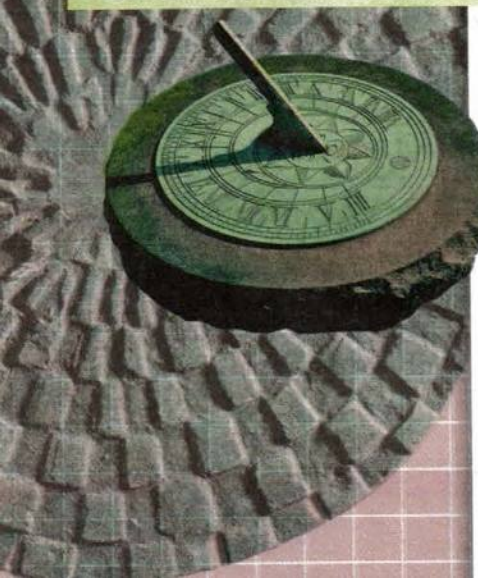
Совсем не всегда дроби записывали в привычном для нас виде.

Древние греки, а позднее индусы (около 1500 лет назад) записывали дроби с помощью числителя и знаменателя, но без дробной черты. Впервые ввели дробную черту арабские математики, а в Европе, уже в XIII в., – Леонардо Пизанский (Фибоначчи). Но общепринятой она стала значительно позже – в XVI в. Сейчас, особенно в нематематических изданиях, вы можете увидеть такую запись дроби: a/b. Считают, что её ввёл мексиканский издатель газет Мануэль Антонио Вальдес, который использовал для обозначения дроби наклонную волнистую черту: $a\int b$ (конец XVIII в.). Позже её преобразовали в косую черту. Так было проще для типографского набора.

1 ЧТО МЫ ЗНАЕМ О ДРОБЯХ

ВЫ ВСПОМНИТЕ
- Основное свойство дроби
- Как сокращают дроби
- Как приводят дроби к новому знаменателю

За 2000 лет до н.э. в Древнем Вавилоне для нужд астрономии и мореплавания была создана система измерения углов, которой мы пользуемся и сегодня. В Вавилоне действовала не десятичная, а шестидесятеричная система счисления, поэтому единицы измерения делили не на 10, 100 и т. д. долей, а на 60 и т. д. равных частей. Градус разделили на 60 равных частей, получили минуту, которая равна $\frac{1}{60}$ градуса. Минуту разделили на 60 равных частей, получили секунду. Одна секунда равна $\frac{1}{60}$ минуты или $\frac{1}{3600}$ градуса.



В 5 классе вы многое узнали о дробях, научились складывать, вычитать, умножать и делить дроби, сравнивать их, отмечать точками на координатной прямой. Мы продолжим изучение дробей. Но сначала повторим известные вам основные сведения о дробях.

ДРОБИ Запись вида $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, — это дробь. Число, записанное над чертой, — **числитель** дроби, под чертой — её **знаменатель**. Вот несколько примеров дробей:

$$\frac{1}{6},\ \frac{8}{3},\ \frac{3}{100},\ \frac{23}{24}.$$

Дроби — великое изобретение человечества. Имея дроби, мы всегда можем разделить одно натуральное число на другое (чего нельзя сделать, если ограничиться только натуральными числами). Действительно, вы знаете, что частное от деления натурального числа a на натуральное число b равно дроби $\frac{a}{b}$:

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Например, $7 : 3 = \frac{7}{3}$, $10 : 19 = \frac{10}{19}$, $72 : 24 = \frac{72}{24}$.

Так как выражения $a : b$ и $\frac{a}{b}$ означают одно и то же, то черту дроби рассматривают как другое обозначение действия деления двух натуральных чисел.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ Для каждой дроби существует бесконечное множество равных ей дробей, например: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \ldots$. Преобразовать дробь в равную позволяет *основное свойство дроби*.

> **!** Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

Применяя это свойство, можно приводить дроби к новому знаменателю, а также сокращать их.

Пример 1. Приведём дробь $\frac{1}{3}$ к знаменателю 12.
Найдём дополнительный множитель: $12 : 3 = 4$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на 4:

$$\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{4}{12}.$$

Понятно, что дробь $\frac{1}{3}$ можно привести не к любому знаменателю. Например, её нельзя привести к знаменателю 10, так как 10 не делится на 3. Но её всегда можно представить в виде дроби, знаменатель которой кратен 3, например, равен 6, 9, 51, 72.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{432}{540}$.

Будем последовательно находить общие делители числителя и знаменателя и сокращать на них дробь:

$$\frac{432}{540}=\frac{216}{270}=\frac{108}{135}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5}.$$

Сначала мы разделили числитель и знаменатель на 2, потом ещё раз на 2, затем на 3 и, наконец, на 9. Можно было сделать это и иначе: например, сразу разделить числитель и знаменатель на 4 и т. д.

Пример 3. Приведём к *наименьшему общему знаменателю* дроби:

а) $\frac{5}{16}$ и $\frac{3}{8}$; б) $\frac{7}{11}$ и $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{25}$ и $\frac{11}{15}$.

а) Число 16 кратно 8, значит, оно и является наименьшим общим знаменателем.

Приведём дробь $\frac{3}{8}$ к знаменателю 16: $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{6}{16}$.

б) Общий знаменатель данных дробей должен делиться и на 11, и на 3. Наименьшим числом, которое делится на каждое из них, является их произведение — 33.

Приведём каждую из дробей к знаменателю 33:

$$\frac{7}{11}=\frac{7\cdot 3}{11\cdot 3}=\frac{21}{33};\quad \frac{2}{3}=\frac{2\cdot 11}{3\cdot 11}=\frac{22}{33}.$$

в) В качестве общего знаменателя данных дробей можно взять произведение чисел 25 и 15 — число 375, но такой знаменатель не будет наименьшим. Будем последовательно перебирать числа, кратные 25 (большему знаменателю), и проверять, делятся ли они на 15: число 50 не делится на 15, а число 75 уже делится. Значит, наименьший общий знаменатель дробей равен 75.

Имеем

$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 3}{25\cdot 3}=\frac{9}{75};$$

$$\frac{11}{15}=\frac{11\cdot 5}{15\cdot 5}=\frac{55}{75}.$$

В старинных системах мер, которые не сохранились до нашего времени, чаще всего деление единиц измерения шло по двоичной системе, т. е. каждая единица делилась на две равные части. Именно так строилась система дробей в Древней Руси. Ниже в левом столбце записаны некоторые применявшиеся дроби (в их современной форме), а в правом — их словесные обозначения.

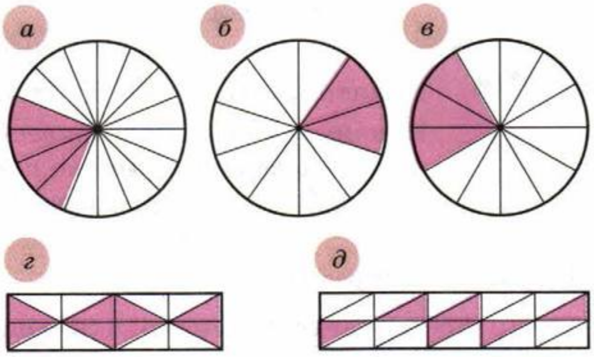
Дробь	Словесное обозначение
$\frac{1}{2}$ числа	«пол»
$\frac{1}{4}$ числа	«четь» или «четверть»
$\frac{1}{8}$ числа	«полчети» или «полчетверти»
$\frac{1}{16}$ числа	«пол-полчети»
$\frac{1}{32}$ числа	«пол-пол-полчети»

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте основное свойство дроби и проиллюстрируйте его примером.
- Объясните на примере дробей $\frac{7}{10}$ и $\frac{4}{15}$, как привести дроби к общему знаменателю.

УПРАЖНЕНИЯ

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ



1.1

1 Какая часть фигуры закрашена (рис. *1.1*)? Запишите ответ разными дробями.

2 Пирог разрезали на 6 равных частей. Одну из них разделили ещё на 3 равные части. Какую часть пирога составляет одна маленькая часть? Выберите верный ответ.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{12}$ 4) $\frac{1}{18}$

3 Три подруги решили написать поздравительные открытки к празднику. Они разделили всю работу поровну. Однако Таня нашла себе трёх помощниц, с которыми разделила свою часть работы поровну. Какую часть всей работы выполнила Таня?

4 а) Приведите дроби $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{2}$ и $\frac{4}{3}$ к знаменателю 18.

б) Приведите дроби $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{16}$ и $\frac{21}{40}$ к знаменателю 80.

5 Сократите дробь: а) $\frac{24}{30}$; б) $\frac{12}{36}$; в) $\frac{28}{48}$; г) $\frac{44}{100}$; д) $\frac{32}{72}$.

6 Сократите дробь: а) $\frac{78}{338}$; б) $\frac{255}{525}$; в) $\frac{324}{405}$; г) $\frac{84 \cdot 108}{48 \cdot 126}$; д) $\frac{96 \cdot 35 \cdot 110}{33 \cdot 80 \cdot 105}$.

7 Покажите, что верны равенства:

а) $\frac{5}{9} = \frac{55}{99} = \frac{555}{999}$; б) $\frac{13}{77} = \frac{1313}{7777} = \frac{131\,313}{777\,777}$.

Образец. Покажем, что верны равенства $\frac{3}{8} = \frac{33}{88} = \frac{333}{888}$:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 11}{8 \cdot 11} = \frac{33}{88};\ \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 111}{8 \cdot 111} = \frac{333}{888}.$$

Значит, все три дроби равны.

Можно поступить иначе: сократим дробь $\frac{33}{88}$ на 11, а дробь $\frac{333}{888}$ на 111; в каждом случае получим $\frac{3}{8}$. Значит, все три дроби равны.

8 Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{16}$ и $\frac{3}{2}$; д) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$;

б) $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{5}$; г) $\frac{3}{20}$ и $\frac{7}{10}$; е) $\frac{7}{12}$ и $\frac{5}{8}$.

СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

9 Сравните дроби и запишите результат с помощью знаков $>$, $<$, $=$:

а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{7}{10}$; в) $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{8}$; д) $\frac{9}{8}$ и $1\frac{1}{8}$;

б) $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$; г) $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{16}$; е) $1\frac{7}{20}$ и $\frac{11}{9}$.

10 Запишите в порядке возрастания дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$.

11 Запишите в порядке убывания дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$.

12 На тренировке Оля пробежала стометровку за $\frac{1}{3}$ мин, Галя — за $\frac{17}{60}$ мин, Вера — за $\frac{3}{10}$ мин, Зоя — за $\frac{4}{15}$ мин. В каком порядке девочки пришли к финишу?

13 Не приводя дроби к общему знаменателю, установите, какая из них наибольшая:

а) $\frac{10}{11}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{9}$; б) $\frac{11}{20}$, $\frac{21}{40}$, $\frac{31}{60}$; в) $\frac{23}{48}$, $\frac{17}{36}$, $\frac{35}{72}$.

14 Найдите несколько чисел, которые:

а) больше $\frac{1}{7}$, но меньше $\frac{2}{7}$; б) больше $\frac{4}{9}$, но меньше $\frac{5}{9}$.

15 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1) Дана правильная дробь $\frac{2}{3}$. Запишите обратную ей дробь и определите, какая из этих двух дробей ближе к 1.

2) Запишите какую-нибудь правильную дробь и дробь, обратную ей. Какая из них ближе к 1? Проведите такой эксперимент ещё раз.

3) Сделайте вывод о том, какая из дробей ближе к 1 — правильная или обратная ей неправильная. Поясните свой вывод.

2 ВЫЧИСЛЕНИЯ С ДРОБЯМИ

ВЫ ВСПОМНИТЕ
- Правила действий с дробями

ВЫ УЗНАЕТЕ
- Как выглядит «многоэтажная» дробь и как находить её значение

В этом пункте вы повторите сложение, вычитание, умножение и деление дробей, а также научитесь выполнять более сложные вычисления.

ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ С ДРОБЯМИ Вспомним правила, по которым выполняют действия с дробями. Сначала сформулируем *правила сложения и вычитания*.

1) Чтобы найти сумму (или разность) дробей с одинаковыми знаменателями, нужно найти сумму (или разность) их числителей, а знаменатель оставить прежним:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}; \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

2) Чтобы найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, нужно сначала привести эти дроби к общему знаменателю, а затем воспользоваться первым правилом.

Умножим $5\frac{3}{5}$ на 10.

Способ 1.

$5\frac{3}{5}\cdot 10=\frac{28}{5}\cdot\frac{10}{1}=$

$=\frac{28\cdot 10}{5}=\frac{56}{1}=56.$

Способ 2.

$5\frac{3}{5}\cdot 10=(5+\frac{3}{5})\cdot 10=$

$=50+\frac{3}{5}\cdot 10=50+\frac{30}{5}=$

$=50+6=56.$

Пример 1. Сложим дроби $\frac{5}{18}$ и $\frac{7}{12}$.

Наименьший общий знаменатель дробей равен 36. Дополнительным множителем для первой дроби является число 2, а для второй — число 3:

$$\frac{5^{\backslash 2}}{18}+\frac{7^{\backslash 3}}{12}=\frac{5\cdot 2+7\cdot 3}{36}=\frac{10+21}{36}=\frac{31}{36}.$$

Сформулируем теперь *правило умножения дробей*.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить числители дробей и их знаменатели и первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Пример 2. Умножим $\frac{18}{5}$ на $\frac{5}{12}$:

$$\frac{18}{5}\cdot\frac{5}{12}=\frac{\overset{3}{\cancel{18}}\cdot\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{2}{\cancel{12}}}=\frac{3}{2}.$$

Наконец, сформулируем *правило деления дробей*.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Пример 3. Найдём значение выражения $\frac{4}{9} : \frac{8}{3}$.

Заменим деление умножением на обратное число:

$$\frac{4}{9} : \frac{8}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{{}^{1}\cancel{4} \cdot {}^{1}\cancel{3}}{{}_{3}\cancel{9} \cdot \cancel{8}_{2}} = \frac{1}{6}.$$

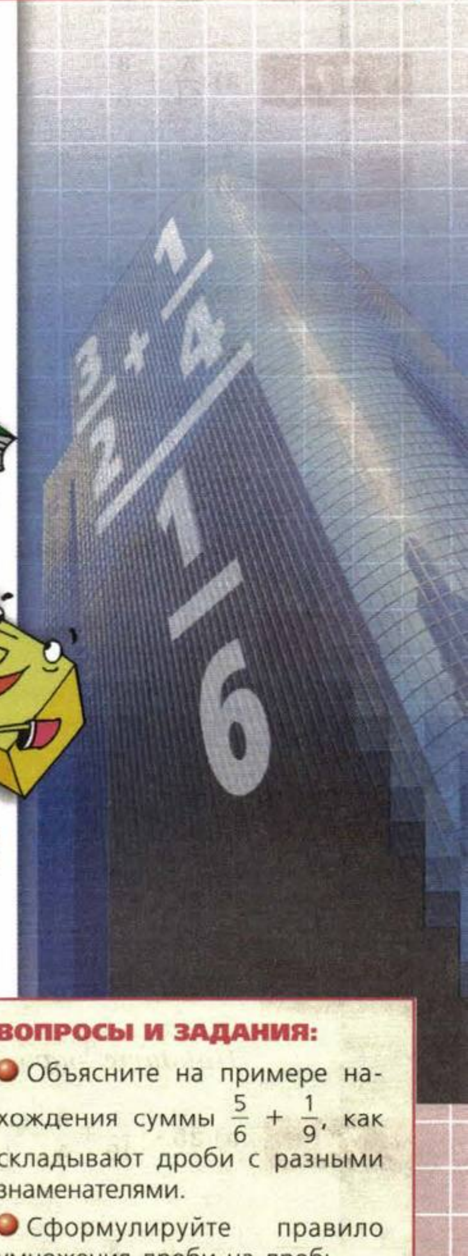
Найдём частное.

$15 : \frac{6}{5} = \frac{15}{1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15 \cdot 5}{6} =$

$= \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$.

«МНОГОЭТАЖНЫЕ» ДРОБИ В математике черту дроби используют как знак деления не только для натуральных чисел, но и для более сложных выражений. Например, выражение $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{5}}$ является другим способом записи частного $\left(1 + \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{2}{5}\right)$.

В дальнейшем вы будете часто встречать такие «многоэтажные» дроби, в которых числители и знаменатели — различные выражения. При нахождении значений таких дробей сначала вычисляют значения выражений, стоящих в числителе и знаменателе, и только потом выполняют деление.



Пример 4. Найдём значение дроби $\dfrac{10}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}$.

Надо выполнить два действия:

1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$;

2) $10 : \frac{5}{4} = 10 \cdot \frac{4}{5} = \frac{10 \cdot 4}{5} = 8$.

Запись решения можно вести цепочкой:

$$\frac{10}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{10}{\frac{5}{4}} = \frac{10 \cdot 4}{5} = 8.$$

Можно преобразовывать «многоэтажные» дроби и другим способом, применяя основное свойство дроби.

Пример 5. Найдём значение дроби $\dfrac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на 12. Значение дроби останется тем же, а от дробей в числителе и знаменателе мы избавимся:

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot 12}{\frac{1}{6} \cdot 12} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot 12}{\frac{1}{6} \cdot 12} = \frac{18 + 3}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните на примере нахождения суммы $\frac{5}{6} + \frac{1}{9}$, как складывают дроби с разными знаменателями.
- Сформулируйте правило умножения дроби на дробь.
- Сформулируйте правило деления дроби на дробь.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ДРОБЯМИ

Найдите сумму или разность (№ 16—19).

16 а) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$; б) $\frac{9}{10} + \frac{3}{10}$; в) $\frac{1}{18} + \frac{11}{18}$; г) $\frac{11}{15} - \frac{2}{15}$.

17 а) $\frac{5}{24} + \frac{3}{8}$; б) $\frac{7}{10} - \frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; г) $\frac{8}{11} + \frac{1}{2}$.

18 а) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$; в) $\frac{4}{45} - \frac{1}{30}$; г) $\frac{17}{18} - \frac{11}{12}$.

19 а) $4 + 5\frac{1}{4}$; б) $4\frac{3}{4} - 2$; в) $1\frac{2}{9} + 3$; г) $4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}$.

20 Расположите в порядке возрастания следующие суммы:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{7}$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$.

Найдите произведение или частное (№ 21—23).

21 а) $\frac{9}{10} \cdot \frac{5}{12}$; в) $\frac{21}{22} \cdot \frac{2}{5}$; д) $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$;

б) $\frac{3}{5} : \frac{11}{5}$; г) $\frac{7}{8} : \frac{7}{16}$; е) $1\frac{3}{4} : 10\frac{1}{2}$.

22 а) $\frac{8}{9} : 6$; в) $1 : \frac{3}{7}$; д) $2\frac{7}{9} \cdot 15$;

б) $15 \cdot \frac{5}{6}$; г) $\frac{2}{5} \cdot 12$; е) $3\frac{1}{3} : 30$.

23 а) $10 : 3$; б) $42 : 8$; в) $57 : 30$; г) $28 : 42$.

Найдите значение выражения (№ 24, 25).

24 а) $25 \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right)$; б) $5 : 1\frac{1}{4} + 7 : 1\frac{1}{3}$.

25 а) $6\frac{6}{11} \cdot \frac{3}{4} : 2\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{5}$; в) $\frac{5}{14} + \frac{18}{35} + \left(1\frac{1}{4} - \frac{5}{14}\right) : \left(\frac{5}{12}\right)^2$;

б) $9\frac{1}{3} : \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{16} : \frac{14}{27}$; г) $\left(\frac{7}{12} - \frac{8}{15}\right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{9}{16}\right)$.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

26 Двое дежурных вымыли все парты в классе. Первый сказал, что вымыл $\frac{3}{5}$ всех парт, а второй сказал, что вымыл $\frac{2}{3}$ всех парт. Их товарищ заметил, что кто-то из них ошибся. Как он догадался?

27 У Андрея два аквариума. Длина, ширина и высота одного из них $\frac{9}{10}$ м, $\frac{2}{5}$ м и $\frac{1}{2}$ м, а другого — $\frac{4}{5}$ м, $\frac{3}{4}$ м и $\frac{3}{10}$ м.
В какой из аквариумов вмещается больше воды?

28 Корова съедает копну сена за 3 дня, а коза может съесть такую копну за 6 дней. Ответьте на вопросы:
1) Какую часть копны съедает каждое животное за один день?
2) Какую часть копны съедят они вместе за один день?
3) На сколько дней хватит этой копны корове и козе вместе?

29 Отец и сын, работая вместе, покрасили забор за 12 ч. Если бы отец красил забор один, он выполнил бы эту работу за 21 ч. За сколько часов покрасил бы этот забор сын?

«МНОГОЭТАЖНЫЕ» ДРОБИ

30 Вычислите:

а) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}$; в) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}$; г) $\dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}{15}$.

31 Что может означать запись $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{}{3}}$? Примите по очереди каждую дробную черту за основную и запишите соответствующие выражения. Найдите значение каждого из выражений.

32 Запишите выражение в виде дроби и сократите её:

а) $(21 \cdot 18) : 14$; б) $50 : (16 \cdot 25)$; в) $(12 \cdot 15) : 40$; г) $(4 \cdot 24) : (2 \cdot 8)$.

33 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{3}$; б) $\dfrac{\frac{17}{100} - \frac{1}{10}}{10}$; в) $\dfrac{1 - \frac{1}{6}}{2 + \frac{1}{6}}$; г) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$.

3 ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ДРОБИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как найти часть от числа
- Как найти число по его части
- Как узнать, какую часть одно число составляет от другого

Вспомним, как решаются основные задачи на дроби, и рассмотрим разные способы их решения.

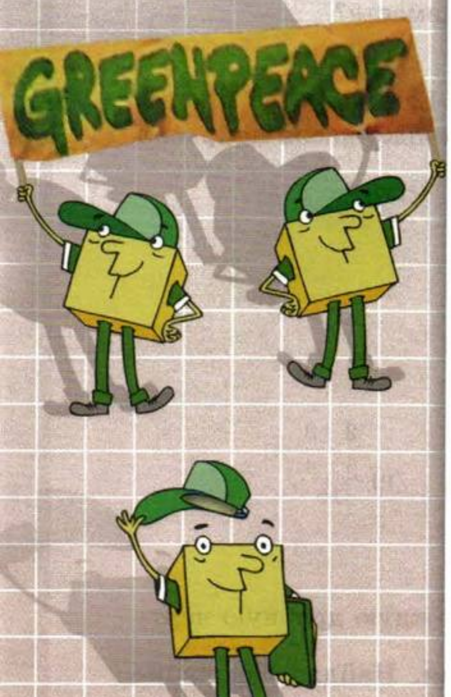
НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ОТ ЧИСЛА

Задача 1. По радио сообщили, что жители города Синегорска активно борются против загрязнения окружающей среды и $\frac{2}{5}$ из них присоединились к движению «Гринпис» (в переводе на русский — «Зелёный мир»). Сколько жителей города Синегорска участвует в этом движении, если известно, что в городе проживает 80 тыс. человек?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, надо найти $\frac{2}{5}$ от 80 000. Это можно сделать разными способами.

Способ 1. Решим задачу, опираясь на смысл понятия дроби. Найдём пятую часть от числа 80 000 и умножим результат на 2:

$$(80\,000 : 5) \cdot 2 = 32\,000 \text{ (чел.)}.$$



Способ 2. Воспользуемся правилом нахождения части от числа.

> **!** Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь.

Умножив 80 000 на $\frac{2}{5}$, получим тот же результат:

$$80\,000 \cdot \frac{2}{5} = \frac{80\,000 \cdot 2}{5} = 32\,000 \text{ (чел.)}.$$

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА ПО ЕГО ЧАСТИ

Рассмотрим обратную задачу.

Задача 2. По радио сообщили, что 32 тыс. жителей города Синегорска присоединились к движению «Гринпис». Это составляет $\frac{2}{5}$ всего населения города. Сколько человек проживает в городе Синегорске?

Решим эту задачу так же, как и первую, разными способами.

Способ 1. Будем опираться на смысл понятия дроби. По условию 32 000 — это две пятых от числа всех жителей города. Чтобы найти одну пятую часть всех жителей, надо 32 000 разделить на 2. А так как всё население составляет пять таких частей, то результат надо умножить на 5:

$$(32\,000 : 2) \cdot 5 = 80\,000 \text{ (чел.)}.$$

Способ 2. Воспользуемся правилом нахождения числа по его части.

> **!** **Чтобы найти число по его части, нужно эту часть разделить на дробь, ей соответствующую.**

Разделив 32 000 на $\frac{2}{5}$, получим тот же результат:

$$32\,000 : \frac{2}{5} = 32\,000 \cdot \frac{5}{2} = \frac{32\,000 \cdot 5}{2} = 80\,000 \text{ (чел.)}$$

КАКУЮ ЧАСТЬ ОДНО ЧИСЛО СОСТАВЛЯЕТ ОТ ДРУГОГО

Задача 3. Журналист готовит сообщение для радионовостей. Ему известно, что в городе Синегорске проживает 80 000 человек и 32 000 из них присоединились к движению «Гринпис». Определите, какая это часть жителей города.

Будем рассуждать так: один человек — это $\frac{1}{80\,000}$ часть населения города. Тогда 32 000 человек составляют $\frac{1}{80\,000} \cdot 32\,000 = \frac{32\,000}{80\,000} = \frac{2}{5}$ населения города.

Для ответа на вопрос задачи мы записали дробь $\frac{32\,000}{80\,000}$, которая выражает частное от деления 32 000 на 80 000.

Таким образом, можно сформулировать правило.

> **!** **Чтобы узнать, какую часть одно число составляет от другого, надо первое число разделить на второе.**

Применим это правило для решения задачи.

Задача 4. На авиарейс было продано 56 билетов, а 24 места остались незанятыми. Какая часть всех мест в самолёте занята?

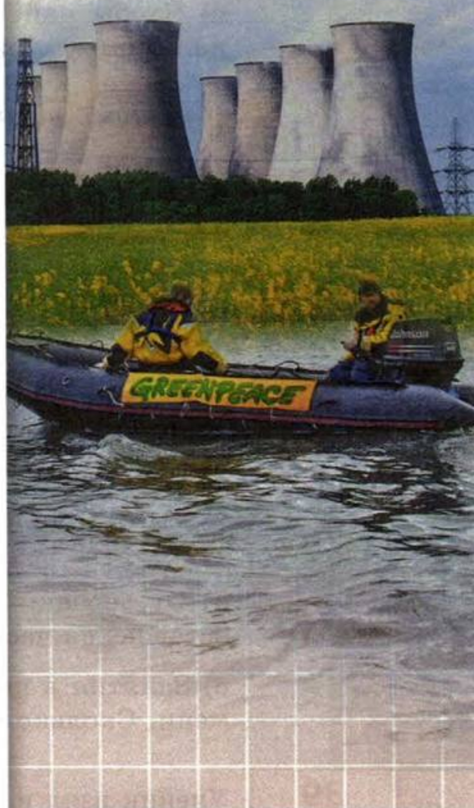
Сначала найдём, сколько всего мест в самолёте:

$$56 + 24 = 80 \text{ (мест)}.$$

Теперь разделим 56 на 80, чтобы узнать, какую часть число 56 составляет от числа 80:

$$\frac{56}{80} = \frac{7}{10}.$$

Итак, в самолёте занято $\frac{7}{10}$ от числа всех мест.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, как найти $\frac{5}{3}$ от числа 600.
- Объясните, как найти число, если $\frac{4}{7}$ этого числа составляют 28.
- Объясните, как найти, какую часть число 24 составляет от числа 54.

УПРАЖНЕНИЯ

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТИ ОТ ЧИСЛА

34 Прочитайте предложения и вставьте нужные слова.
а) Чтобы найти половину некоторого числа, нужно это число разделить на ... или умножить на ... .
б) Чтобы найти четверть некоторого числа, нужно это число разделить на ... или умножить на ... .

Найдите часть от величины (№ 35, 36).

35 а) $\frac{1}{4}$ от 8 кг; б) $\frac{1}{10}$ от 30 км; в) $\frac{3}{4}$ от 12 ч; г) $\frac{2}{5}$ от 20 см.

36 а) $\frac{1}{2}$ от $\frac{3}{4}$ м; б) $\frac{1}{10}$ от $\frac{1}{2}$ г; в) $\frac{3}{4}$ от $\frac{1}{10}$ кг; г) $\frac{2}{5}$ от $\frac{1}{4}$ ч.

37 а) Стакан вмещает 160 г крупы. Крупой наполнили $\frac{2}{5}$ стакана. Сколько граммов крупы насыпали в стакан?
б) Общая площадь окон, которые надо вымыть, составляет 24 м^2. За час вымыли $\frac{5}{8}$ этой площади. Определите площадь окон, вымытых за это время.

38 а) От верёвки длиной 2 м 40 см отрезали $\frac{3}{8}$ её длины. Найдите длину оставшейся части.

б) Занятия в школе длятся 5 ч 30 мин. Перемены занимают $\frac{3}{11}$ этого времени. Сколько часов длятся уроки?

39 Ученик взял в библиотеке интересную книгу. В ней 75 страниц. В первый день он прочитал $\frac{3}{5}$ всей книги, во второй — $\frac{2}{5}$ оставшихся страниц. Сколько страниц ему осталось прочитать?

40 Учащиеся шестых классов составляют $\frac{1}{14}$ всех учащихся школы, причём $\frac{2}{5}$ из них — девочки. Сколько девочек в шестых классах, если всего в школе 910 учащихся?

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА ПО ЕГО ЧАСТИ

41 Найдите длину отрезка, если:

а) $\frac{2}{5}$ его длины равны 12 м;

б) $\frac{3}{4}$ его длины равны 9 см;

в) $\frac{3}{5}$ его длины равны 15 дм;

г) $\frac{2}{7}$ его длины равны 8 мм.

42 а) Размеры макета дома составляют $\frac{1}{12}$ его реальных размеров. На макете окно имеет ширину 60 мм. Какова ширина окна в действительности?
б) Размеры участка земли на плане составляют $\frac{3}{1000}$ его действительных размеров. Чему равна одна из сторон участка, если на плане она равна 9 см?

43 Сергей заполнил $\frac{5}{8}$ тетради по математике, и у него осталось 36 чистых листов. Сколько листов в тетради?

44 По рецепту молочного коктейля молоко составляет $\frac{7}{10}$ его массы, фруктовый сироп — $\frac{1}{4}$, а ванилин — $\frac{1}{20}$. Для приготовления коктейля взяли 350 г молока. Рассчитайте, сколько граммов сиропа и сколько граммов ванилина надо взять.

КАКУЮ ЧАСТЬ ОДНО ЧИСЛО СОСТАВЛЯЕТ ОТ ДРУГОГО

45 а) Какую часть от 1 кг составляют 500 г? 260 г? 30 г? 25 г?
б) Какую часть от 1 ч составляют 30 мин? 15 мин? 10 мин? 6 мин?
в) Какую часть суток составляет 1 ч? 2 ч? 5 ч?

46 а) Из 30 000 избирателей, включённых в списки, пришли голосовать 24 000 человек. Какая часть избирателей приняла участие в голосовании?
б) В школе 900 учащихся. На уроках 15 декабря отсутствовали 60 учащихся. Какая часть учащихся в этот день пропустила уроки?

47 Решите задачу двумя способами.
а) Стакан вмещает 200 г молока. В него налили 160 г молока. Какая часть стакана осталась незаполненной?
б) Человек спит в среднем 8 ч в сутки. Какую часть суток человек бодрствует?
Подсказка. К пункту а). Первый способ: сначала найдите, какая часть стакана заполнена; второй способ: сначала найдите, сколько граммов молока ещё может поместиться в стакан.

48 Два спортсмена стреляют по летящей мишени. Они договорились, что побеждает тот, у кого выше доля попаданий. Первый стрелок сделал 80 выстрелов и попал в цель 60 раз, второй сделал 60 выстрелов и попал 50 раз. Кто из них победил?

4 ЧТО ТАКОЕ ПРОЦЕНТ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что такое процент
- Как находить процент от величины
- Как решать задачи на проценты

Вам наверняка приходилось слышать слово «процент» и видеть значок, его обозначающий. Например: по результатам голосования победитель получил 52 % голосов; загрузка программы выполнена на 63 %. Многие из вас даже знают, что такое процент. Здесь вы познакомитесь с этим понятием подробно и научитесь выполнять вычисления с процентами.

ЧТО ПОНИМАЮТ ПОД СЛОВОМ «ПРОЦЕНТ» Проценты, так же как и дроби, выражают доли величины.

! **Процент от некоторой величины — это одна сотая её часть.**
Чтобы найти один процент от величины, нужно эту величину разделить на 100.

Существует забавная версия происхождения символа %. Предполагают, что он появился в конце XVII в. из-за опечатки. В одной из книг наборщик по ошибке вместо принятого в те времена сокращения этого термина набрал $\frac{o}{o}$. Этот знак вошёл в обиход и постепенно преобразовался в знакомый нам символ.

Для обозначения слова «процент» применяется знак %.

1 % — это $\frac{1}{100}$ величины.

Рассмотрим примеры.

1) Найдём 1 % от 600 р.: $\frac{600}{100} = 6$, значит, 1 % от 600 р. равен 6 р.

2) Найдём 24 % от 5 кг: сначала найдём 1 % от 5 кг, получим $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ (кг); теперь найдём 24 %:

$$\frac{1}{20} \cdot 24 = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \text{ (кг).}$$

Величина, от которой вычисляют проценты (например, сумма денег на банковском вкладе, длина участка ремонтируемой дороги, количество компьютеров, выпускаемых фирмой, число учащихся в классе), составляет 100 своих сотых долей, т. е. 100%.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Задача 1. Кресло стоит 3200 р. Во время распродажи его уценили на 31 %. Сколько денег может сэкономить покупатель, купив кресло на распродаже?

Решим эту задачу разными способами.

Способ 1. Будем рассуждать, опираясь на смысл понятия процента.

Сначала найдём 1 % от стоимости кресла:

$$3200 : 100 = 32 \text{ (р.).}$$

Теперь найдём 31 % его стоимости: $32 \cdot 31 = 992$ (р.).

Значит, купив кресло на распродаже, покупатель сэкономит 992 р.

Способ 2. Вы знаете, что 31 % от величины — это $\frac{31}{100}$ этой величины. Чтобы найти $\frac{31}{100}$ от 3200 р., можно 3200 умножить на $\frac{31}{100}$:

$$3200 \cdot \frac{31}{100} = \frac{3200 \cdot 31}{100} = 992 \text{ (р.)}.$$

Понятно, что мы получили тот же ответ.

Иногда нужное число процентов от величины можно найти совсем просто. Так, 10 % — это $\frac{10}{100}$, или $\frac{1}{10}$. Поэтому, чтобы найти 10 % какой-либо величины, достаточно разделить эту величину на 10. Например, 10 % от 3200 р. составляют 320 р. В таблице на полях приведены некоторые легко вычисляемые проценты и соответствующие им дроби.

Проценты	Дроби
10 %	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
20 %	$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
25 %	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
50 %	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
75 %	$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Задача 2. В прошлом году в марафоне, посвящённом Дню города, участвовало 300 горожан. В этом году число участников марафона увеличилось на 25 %. Сколько горожан приняло участие в марафоне в этом году?

Сначала узнаем, на сколько человек увеличилось число участников марафона, т. е. найдём 25 % от 300. Так как 25 % — это $\frac{1}{4}$ числа участников, то найдём четверть от 300:

$$300 \cdot \frac{1}{4} = 75 \text{ (чел.)}.$$

Чтобы получить ответ на вопрос задачи, нужно к числу прошлогодних участников прибавить число впервые участвовавших в этом году:

$$300 + 75 = 375 \text{ (чел.)}.$$

Задача 3. При рождении ребёнок весил 3 кг. За год его вес увеличился на 200 %. Сколько стал весить ребёнок, когда ему исполнился один год?

Исходный вес ребёнка составляет 100 %, т. е. 3 кг — это 100 %. Тогда 200 % составляют 6 кг. Значит, к году ребёнок стал весить 3 + 6 = 9 (кг).

Слово «процент» произошло от латинского термина *pro centum*, который означает «сотая доля», а в дословном переводе звучит «на сто». И сейчас в речи вы часто можете услышать это словосочетание, которое используется вместо слова «процент». Например, говорят, что в городе N на каждые 100 человек приходится 12, имеющих высшее образование. Это означает, что высшее образование в этом городе имеет 12 % населения.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называется процентом? Произнесите без слова «процент» следующие фразы: «мальчики составляют 60 % учащихся школы»; «12 % проданных в этом году книг — это научная фантастика».
- Объясните, как узнать, сколько процентов избирателей не пришло на выборы, если в голосовании участвовало 75 % всех избирателей.

УПРАЖНЕНИЯ

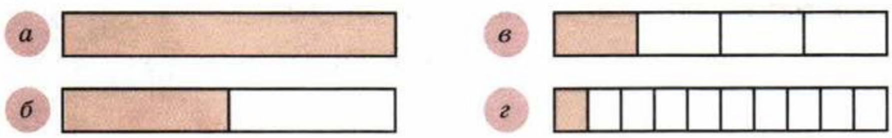
ПОНЯТИЕ ПРОЦЕНТА

49 Замените проценты дробью и сократите её, если возможно.
а) Девочки составляют 40 % класса.
б) В голосовании приняло участие 79 % избирателей.
в) В июне цена бензина была повышена на 5 %.
г) Во время распродажи цены на обувь снизили на 19 %.

50 Выразите в процентах:
а) $\frac{3}{100}$ всех учащихся школы;
б) $\frac{83}{100}$ всех учащихся школы;
в) $\frac{30}{100}$ всех учащихся школы;
г) $\frac{50}{100}$ всех учащихся школы.

51 Выразите проценты дробью и сократите её:
10 %, 20 %, 25 %, 50 %, 75 %, 80 %.

52 Какая часть прямоугольника закрашена (рис. ***1.2***)? Выразите эту часть в процентах.



1.2

53 Выразите в процентах:
а) $\frac{9}{10}$ всего урожая клубники;
б) $\frac{2}{5}$ всего урожая клубники.

54 Соотнесите проценты (верхняя строка) и соответствующие им дроби (нижняя строка).

А. 50 %	**Б.** 3 %	**В.** 5 %	**Г.** 75 %	**Д.** 30 %
1) $\frac{3}{4}$	**2)** $\frac{1}{20}$	**3)** $\frac{3}{10}$	**4)** $\frac{1}{2}$	**5)** $\frac{3}{100}$

55 а) В школьном концерте участвовали 30 % учащихся класса, а 70 % учащихся класса пришли смотреть их выступление. Все ли учащиеся класса были на концерте?
б) За неделю туристы проехали 30 % запланированного пути на велосипедах и 50 % пути на автобусе. Весь ли путь проехали туристы за неделю?

56 На школьную форму потратили 45 % суммы денег, выделенной на подготовку к новому учебному году. Сколько процентов этой суммы осталось на покупку других школьных принадлежностей?

57 Сельское население России составляет 27 %. Каких жителей в России больше — сельских или городских?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

58 а) Найдите 1% от 1 км; 6% от 1 км; 35% от 1 км.
б) Найдите 1% от 1 кг; 9% от 1 кг; 18% от 1 кг.

59 В городе 30 000 жителей. Вычислите устно, сколько жителей составляют 10% населения города. Используйте полученный результат для нахождения 30%, 40%, 70% населения города.

60 За год банк начисляет на вклад «Срочный» 12% от вложенной суммы (т. е. увеличивает её на 12%). Сколько рублей будет начислено на вклад 5000 р.?

61 В библиотеке 40 000 книг. Книги на русском языке составляют 70% всех книг, а на английском — 15%. Сколько в библиотеке книг на русском языке и сколько — на английском?

62 В магазине было 180 кг черешни. Продали 60% всей черешни. Сколько килограммов черешни не продано?

63 В 2009 г. семья Петровых платила за коммунальные услуги 920 р. В 2010 г. стоимость услуг повысилась на 20%. Сколько стала платить семья Петровых за коммунальные услуги в 2010 г.?

64 В магазин привезли 3 т картофеля и 900 кг помидоров. В первый день продали 30% всего картофеля и 45% всех помидоров. Каких овощей было продано больше и во сколько раз?

65 За 3 ч поезд прошёл 240 км. В первый час он прошёл 40% всего пути, во второй час — 50% остатка. Сколько километров прошёл поезд за третий час?

66 Объясните, используя слово «процент», что означают следующие утверждения:
а) На каждые 100 человек приходится 43, которые доверяют гороскопам.
б) Из каждых 100 жителей города 25 имеют домашних животных.

67 Цена билета в купейный вагон на 100% выше, чем в плацкартный вагон. Во сколько раз проезд в купейном вагоне дороже проезда в плацкартном?

68 На шахте «Северная» добывают в 2 раза меньше угля, чем на шахте «Восточная». На сколько процентов добыча угля на «Северной» ниже, чем на «Восточной»?

5

ВЫ УЗНАЕТЕ

- В каких случаях обычно используют столбчатые диаграммы
- В каких случаях используют круговые диаграммы

СТОЛБЧАТЫЕ И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Сейчас практически ни одна газета, ни одна информационная телепрограмма не обходятся без диаграмм, описывающих самые разные стороны нашей жизни. И это естественно, так как информация, представленная графически, воспринимается легче и доступнее. Существуют различные виды диаграмм. Столбчатые (или, как иногда говорят, столбиковые) и круговые диаграммы наиболее простые и распространённые среди них.

СТОЛБЧАТЫЕ ДИАГРАММЫ Какой вид диаграммы выбрать для представления и упорядочивания имеющейся информации, зависит от того, какую идею вы хотите донести с её помощью. *Столбчатые диаграммы* удобно использовать в тех случаях, когда нужно сравнить некоторые данные (например, результаты опроса общественного мнения в разных возрастных группах по одному и тому же вопросу), показать, как меняется со временем интересующее нас явление (или, как говорят иначе, показать *тенденцию*).

1.3

Пример 1. Автомагазин ведёт учёт продаж автомобилей разных заводов. Данные о продажах автомобилей заводов УАЗ, ВАЗ и ГАЗ за первые четыре месяца года представили на диаграммах, которые для наглядности объединили в одну (рис. ***1.3***).

Эта диаграмма позволяет сравнить объёмы продаж автомобилей данных заводов, а также увидеть тенденции и предположить, как дальше будет изменяться спрос на автомобили изучаемых марок.

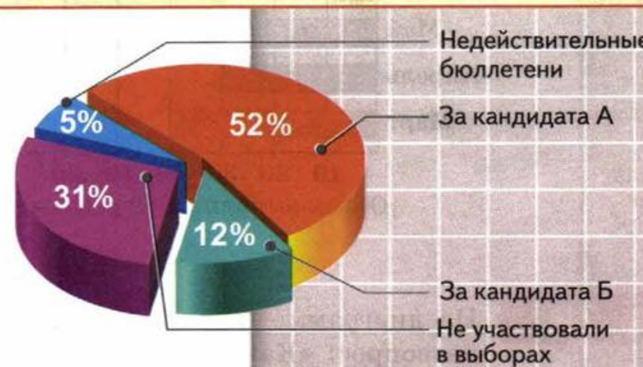
Из диаграммы видно, что больше всего ежемесячно продавали автомобили завода ВАЗ, причём спрос на них оставался примерно одинаковым. Постоянно увеличивались продажи автомобилей ГАЗ, а спрос на автомобили УАЗ уменьшился в марте и апреле. Если предположить, что эти тенденции сохранятся в последующие месяцы, то магазину выгодно уменьшить заказ на УАЗы, но увеличить заказ на ГАЗы.

С помощью диаграмм стараются привлечь внимание читателя к представленной на них информации, поэтому часто диаграммы стремятся сделать яркими и привлекательными. Так, столбчатые диаграммы могут быть плоскими (как диаграмма на с. 24) или объёмными, столбцы на них располагают вертикально или горизонтально. Пример объёмной столбчатой диаграммы приведён на рисунке ***1.4***. Эта диаграмма показывает соотношение мужчин и женщин в нашей стране в разные годы — с конца XIX в. до начала XXI в.

1.4

КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Круговые диаграммы удобно использовать в тех случаях, когда нужно представить соотношение между частями целого. Часто данные на круговых диаграммах выражают в процентах.



1.5

Пример 2. На круговой диаграмме показаны результаты выборов мэра города из двух кандидатов — А и Б (рис. ***1.5***).

Круг изображает всех жителей города, внесённых в списки для голосования, т. е. 100 % избирателей. Их голоса распределились следующим образом. За кандидата А проголосовали 52 % избирателей, поэтому на диаграмме эта часть составляет чуть больше половины круга. За кандидата Б проголосовали 12 % избирателей, соответствующая часть диаграммы составляет примерно восьмую часть круга. Не участвовал в выборах 31 % избирателей, на диаграмме им отведено около трети круга. И наконец, оставшаяся часть, 5 % избирателей, подали бюллетени, которые были признаны недействительными (они были заполнены не по форме или каким-либо образом испорчены).

Эта диаграмма позволяет получить некоторую дополнительную информацию. Например, мы видим, что приняли участие в голосовании большинство избирателей (около 70 %). За победителя проголосовало примерно в 4 раза больше, чем за проигравшего. Почти все избиратели, которые пришли на выборы, проголосовали за одного из двух претендентов, и только по поводу пяти процентов голосовавших можно предположительно сказать, что они не определились с выбором или же были против обоих кандидатов.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие виды диаграмм вы знаете?
- Используя рисунок ***1.3***, определите:
  1) сколько автомобилей каждого завода продано в январе;
  2) на сколько больше автомобилей ГАЗ продано в апреле, чем в марте.
- Придумайте ещё какой-нибудь вопрос по диаграмме на рисунке ***1.3***.
- Используя рисунок ***1.5***, определите:
  1) за кого из кандидатов отдано больше голосов;
  2) сколько процентов избирателей не проголосовало ни за одного кандидата.

УПРАЖНЕНИЯ

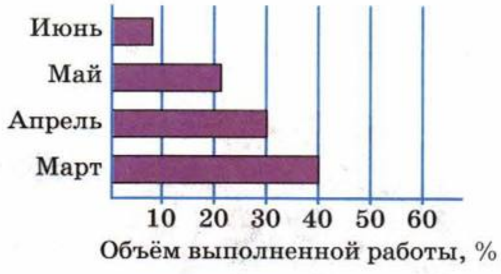
ЧТЕНИЕ ДИАГРАММ

69 Бригада дорожных строителей проложила асфальтовую дорогу длиной 9 км за четыре месяца. На диаграмме (рис. *1.6*) показан объём выполненной работы по месяцам.

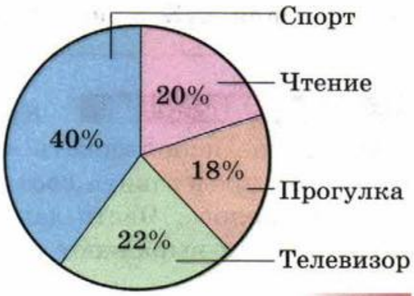
а) В какие месяцы было выполнено менее 25 % всей работы? более 30 % всей работы?

б) Сколько процентов всей дороги было построено за два первых месяца? за два последних месяца?

в) Сколько километров дороги было построено за март и апрель? за май и июнь?



1.6



1.7

70 На диаграмме (рис. *1.7*) показано, как распределились ответы учащихся на вопрос: «Какой вид досуга вы предпочитаете: чтение, просмотр телепередач, занятия спортом, прогулку на свежем воздухе?» Каждый должен был выбрать только одно из этих занятий.

а) Какой вид досуга наиболее популярен среди учащихся? наименее популярен?

б) Сколько процентов учащихся предпочитает активный отдых?

в) Сколько человек предпочло чтение, если всего было опрошено 250 учащихся?

71 На диаграмме (рис. *1.8*) представлены данные о продукции международной фирмы, производящей тёплую одежду из овечьей шерсти. Для каждого вида одежды приведён процент от общего числа выпускаемых изделий. Определите:

а) Какого вида одежды производится больше всего? меньше всего?

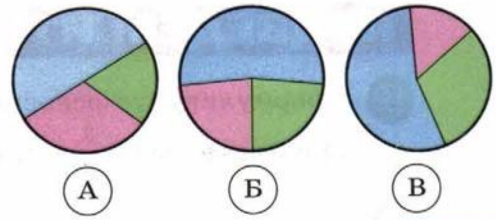
б) Сколько процентов продукции приходится на верхнюю одежду?

в) Сколько процентов всех изделий может предназначаться мужчинам? женщинам?

г) Сколько всего единиц продукции было выпущено за месяц, если жакетов было выпущено 3000 штук?

1.8

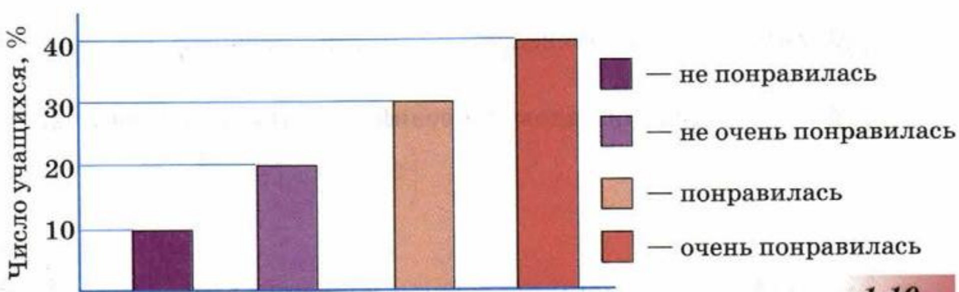
72 В городе Южный в 55 % всех школ изучают английский язык, в 30 % — немецкий язык, а в остальных школах изучают другие иностранные языки. На какой из диаграмм (рис. *1.9*) представлены эти данные?



1.9

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ

73 На диаграмме (рис. *1.10*) показано, как распределились мнения учащихся о прочитанной книге. Изобразите схематично эти данные на круговой диаграмме.



1.10

74 На станции техобслуживания при выполнении ремонта автомобилей ведут учёт неисправностей. Данные об устранённых неисправностях свели в таблицу.

Объект поломки	Месяц		
	октябрь	ноябрь	декабрь
Двигатель	9	9	18
Подвеска	25	26	15
Кузов	24	50	35
Тормозная система	12	15	22

а) Постройте по данным таблицы столбчатую диаграмму, взяв за образец диаграмму на рисунке *1.3*. На вертикальной оси возьмите две клеточки для обозначения 10 неисправностей.

б) Изобразите схематично на круговой диаграмме данные о неисправностях автомобилей за ноябрь.

75 **ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ**

Рассмотрите диаграмму на рисунке *1.4*. Ответьте на вопросы:

1) Кого в нашей стране больше — мужчин или женщин? Менялось ли это соотношение с годами? В какие годы на 1000 мужчин приходилось больше всего женщин, а в какие годы — меньше всего? Запишите свои выводы.

2) Какие ещё выводы вы можете сделать по этой диаграмме?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 Сформулируйте основное свойство дроби. Опираясь на это свойство, приведите дробь $\frac{2}{3}$ к знаменателю 24; сократите дробь $\frac{98}{112}$.

2 Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей; умножения дробей; деления дробей. Проиллюстрируйте эти правила на примерах вычисления значений выражений:

а) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$; б) $\frac{5}{9} + \frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{15}$; г) $\frac{10}{21} : \frac{5}{6}$.

3 Вычислите произведение $24 \cdot \frac{3}{8}$ и частное $\frac{5}{6} : 30$.

4 Определите порядок действий и найдите значение выражения

$$\left(2 - \frac{7}{10}\right) : \left(\frac{5}{7} + \frac{3}{14}\right).$$

5 Найдите разными способами значение выражения $\dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{3}$.

6 Расскажите, как найти дробь от числа; число по его дроби. Решите задачу: «На теплоходе 120 мест. Во время поездки пассажирами было занято $\frac{2}{5}$ всех мест. Сколько свободных мест оказалось на теплоходе?»

7 Как узнать, какую часть одно число составляет от другого? Ответьте на вопрос задачи: «В учебнике 160 страниц. Какую часть учебника составляет глава, в которой 24 страницы?»

8 Что такое процент? Выразите дробью 17 %, 80 %. Выразите в процентах $\frac{7}{100}$ стоимости товара; $\frac{33}{100}$ стоимости товара. Что больше: 46 % или половина стоимости товара?

9 Решите задачу.
а) Из 200 участников конкурса 17 % — дети. Каков процент взрослых в этом конкурсе? Сколько детей и сколько взрослых участвует в конкурсе?
б) Во время распродажи цену ботинок снизили на 30 %. Сколько стали стоить ботинки, цена которых до распродажи была 1200 р.?

10 Какие виды диаграмм вы знаете? Пользуясь диаграммой на рисунке **1.3**, определите, машин каких заводов — ВАЗ или ГАЗ — было продано больше в апреле и на сколько.

глава 2

ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

- ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ
- ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ
- РАССТОЯНИЕ

ИНТЕРЕСНО

Так устроен наш мир, что если над гладью водоёма выронить из рук камень, то он упадёт по прямой, перпендикулярной поверхности водоёма. Точно так же падают и струи водопада, устремляясь с обрыва вертикально вниз. Связано это с притяжением Земли.

Это свойство природы знали ещё древние строители. Чтобы возведённые на равнине стены крепостей и храмов стояли устойчиво, все вертикальные конструкции должны быть перпендикулярны плоскости земли. Моделью прямой, перпендикулярной поверхности земли, служит отвес — грузик, закреплённый на конце верёвки. Пользуются этим нехитрым приспособлением и сейчас.

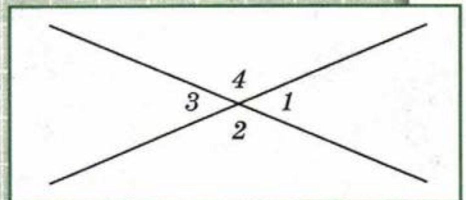
6 ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какие углы называют вертикальными
- Как можно начертить перпендикулярные прямые
- О важной роли перпендикулярности в окружающем мире

Вы уже много знаете о прямой. Например, вам известно, что прямая бесконечна, что через две точки можно провести только одну прямую. Теперь мы рассмотрим взаимное расположение двух прямых.

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ На рисунке *2.1* изображены две пересекающиеся прямые. Они делят плоскость на четыре угла. У этих углов общая вершина — точка пересечения прямых.



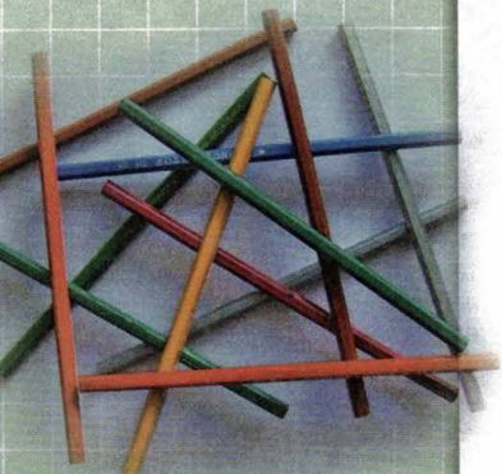
2.1

Посмотрите на углы 1 и 3. Для таких углов есть специальное название — их называют **вертикальными**. Углы 2 и 4 тоже вертикальные. Таким образом, при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов.

Мы видим, что каждый из углов 1 и 3 дополняет один и тот же угол 2 (или угол 4) до развёрнутого. Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Точно так же $\angle 2 = \angle 4$.

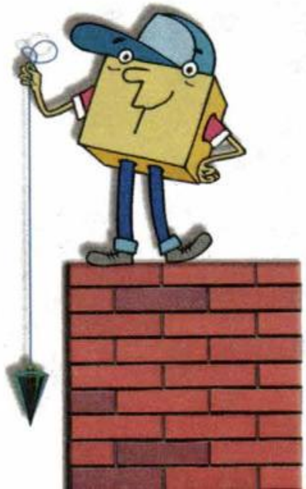
Если одну пару вертикальных углов составляют острые углы, то другую — тупые. Пусть, например, каждый из острых углов равен 30°, тогда каждый из тупых углов равен $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

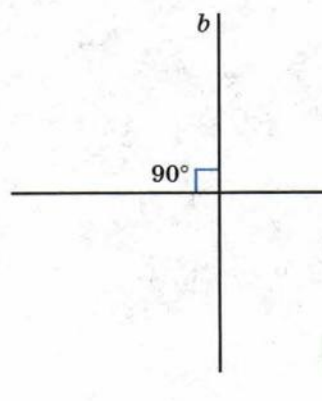
> **!** Вертикальные углы равны.



ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ Может оказаться так, что все четыре угла, образовавшиеся при пересечении двух прямых, равны между собой. Тогда каждый из них равен 90° (рис. *2.2*). Это особый случай взаимного расположения прямых, в этом случае прямые называют **перпендикулярными**.

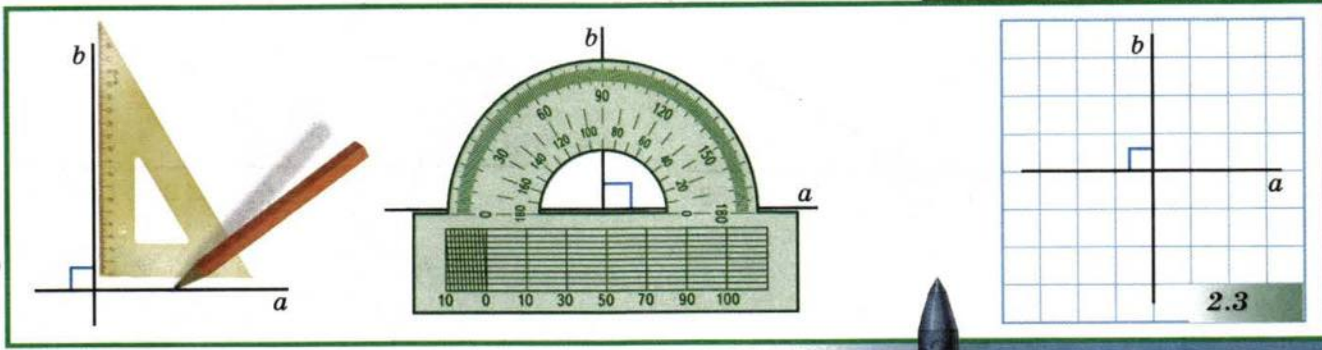
Слово «перпендикулярный» произошло от латинского слова *perpendicularis*, что означает «отвесный». Если на ровной горизонтальной поверхности провести прямую, то перпендикулярную ей вертикальную прямую задаст отвес. Так возводили стены зданий ещё древние строители.





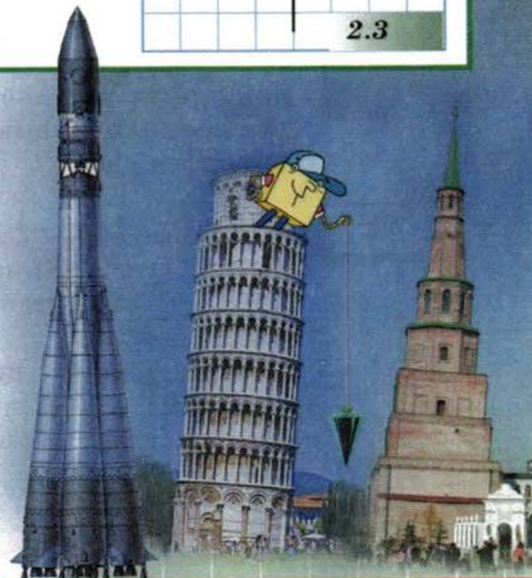
2.2

Для обозначения перпендикулярности используют знак $\perp$, а фразу «прямая a перпендикулярна прямой b» записывают так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые можно построить и с помощью угольника, и с помощью транспортира (рис. **2.3**). И совсем просто начертить их на клетчатой бумаге.



2.3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ Возможно, вы слышали о Пизанской башне (Италия): она стоит наклонно к поверхности земли, и именно поэтому существует угроза её падения. Спортсмен, прыгающий с вышки, старается войти в воду вертикально, чтобы не было брызг: это оценивается судьями. Космическая ракета должна располагаться на стартовой площадке вертикально для обеспечения максимальных энергетических возможностей: чтобы вывести на орбиту как можно большую полезную массу.



Возьмите карандаш и поставьте его сначала наклонно, а затем вертикально. Наклонных положений может быть сколько угодно, а вертикальное — только одно. Это особый случай. Представьте себе, что карандаш — это модель прямой, а стол — модель плоскости, в таких случаях в математике говорят, что *прямая перпендикулярна плоскости*.

А вот две соседние стены комнаты — это модель двух *перпендикулярных плоскостей*. Проверить, насколько качественно строители выполнили свою работу, можно с помощью угольника.

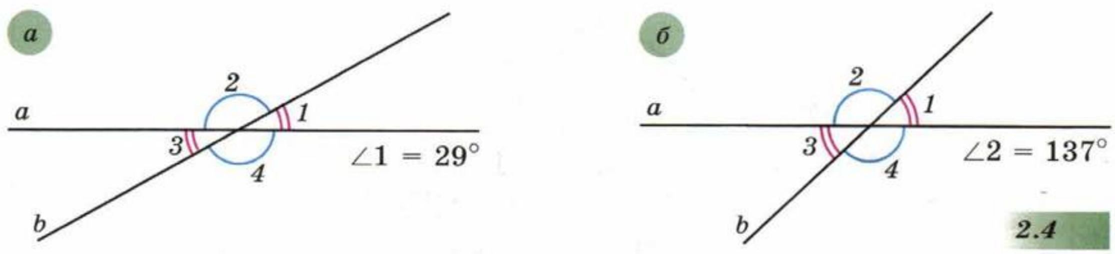
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен: а) 20°; б) 105°. Найдите остальные углы.
- В каком случае две прямые называют перпендикулярными?
- Найдите в окружающей вас обстановке: а) перпендикулярные прямые; б) прямые, перпендикулярные плоскости.
- Сделайте отвес и проверьте с его помощью перпендикулярность полу входной двери, стенок шкафа.

УПРАЖНЕНИЯ

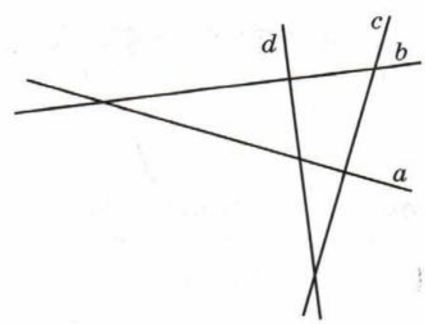
УГЛЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПРЯМЫХ

76 На рисунке **2.4** изображены две пересекающиеся прямые a и b и задана величина одного из углов. Найдите величины остальных углов.



2.4

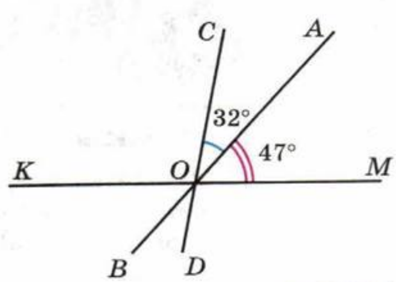
77 Найдите на рисунке **2.5** все пары перпендикулярных прямых. Запишите ответ, используя знак $\perp$.



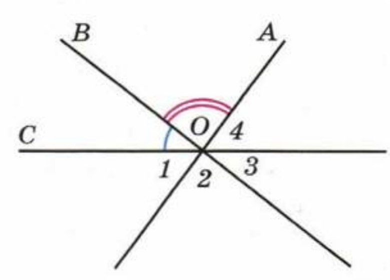
2.5

78 а) Прямые AB, CD, KM пересекаются в точке O (рис. **2.6**), причём $\angle AOM = 47^\circ$ и $\angle AOC = 32^\circ$. Найдите $\angle COK$, $\angle KOB$, $\angle BOD$, $\angle DOM$.

б) Через точку O проведены три прямые (рис. **2.7**), $\angle AOC = 130^\circ$, $\angle AOB = 91^\circ$. Найдите углы, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4.



2.6



2.7

ЧЕРТИМ ПРЯМЫЕ

79 Используя транспортир, постройте прямые, угол между которыми равен: а) 25°; б) 70°; в) 90°.

80 Начертите на глаз на нелинованной бумаге прямые, пересекающиеся под углом: а) 90°; б) 45°; в) 60°. Проверьте себя, выполнив измерения.

81 На нелинованной бумаге проведите прямую. Обозначьте её буквой k. Отметьте одну точку, лежащую на этой прямой, и одну точку, не лежащую на этой прямой. С помощью угольника через каждую из этих точек проведите прямую, перпендикулярную прямой k.

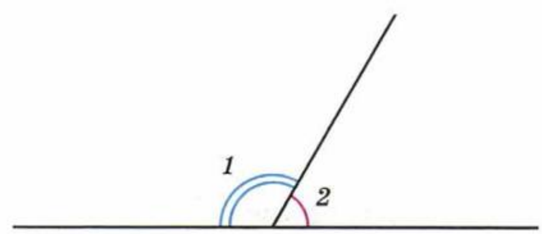
82 На листе нелинованной бумаги проведите прямую k и отметьте точку C, лежащую на прямой k, и точку D, не лежащую на прямой k. С помощью перегибаний постройте прямую, перпендикулярную прямой k: а) проходящую через точку C; б) проходящую через точку D.

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

83 Одна сторона углов 1 и 2 на рисунке ***2.8*** общая, а две другие стороны составляют прямую линию. Такие углы называют *смежными*. Смежные углы образуют развёрнутый угол, т. е. их сумма равна 180°.

а) Один из двух смежных углов равен 40°. Чему равен другой угол?

б) Могут ли смежные углы быть равными? Если да, то сделайте соответствующий рисунок.



2.8

в) Назовите все пары смежных углов, изображённых на рисунке ***2.1***.

г) По рисунку ***2.6*** назовите угол, смежный с углом AOC. Сколько таких углов? Назовите углы, смежные с углом COK; AOM; KOD.

84 а) Сколько пар смежных углов образуется при пересечении двух прямых?

б) Сумма трёх углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 240°. Найдите величину каждого угла.

85

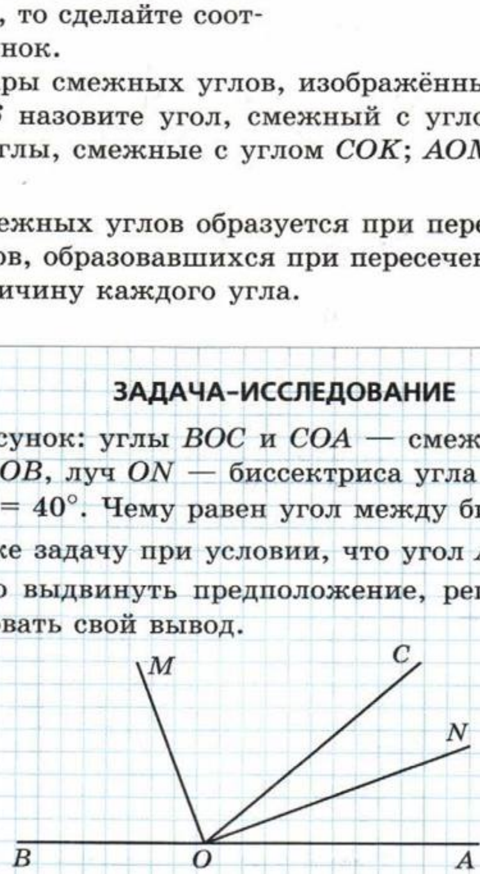
ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

Рассмотрите рисунок: углы BOC и COA — смежные, луч OM — биссектриса угла COB, луч ON — биссектриса угла AOC.

1) Пусть $\angle AOC = 40°$. Чему равен угол между биссектрисами?

2) Решите эту же задачу при условии, что угол AOC равен 60°; 82°.

3) Какое можно выдвинуть предположение, решив эти задачи? Попробуйте обосновать свой вывод.



7 ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

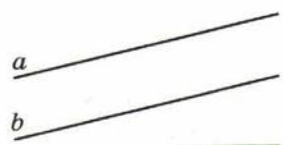
ВЫ УЗНАЕТЕ

- О том, какие прямые называют параллельными
- Как можно начертить параллельные прямые
- О том, что в пространстве есть ещё один случай взаимного расположения прямых — прямые могут быть скрещивающимися

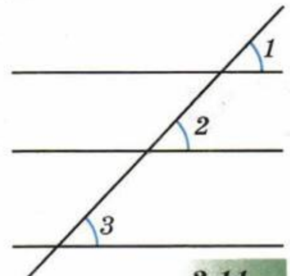
На рисунке ***2.9*** изображены две прямые. Понятно, что эти прямые где-то пересекутся, правда, это будет уже за страницей учебника. Но оказывается, на плоскости существуют и такие прямые, которые никогда не пересекутся.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ Если прямые, лежащие в одной плоскости, не пересекаются, то их называют *параллельными*. Прямые a и b, изображённые на рисунке ***2.10***, параллельны, записывают это так: $a \parallel b$.

2.9



2.10



2.11

На рисунке ***2.11*** изображены параллельные прямые и проведена прямая, их пересекающая. Эта прямая пересекает каждую из параллельных прямых под одним и тем же углом: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

Это очень важное свойство, характеризующее параллельные прямые. На этом свойстве, в частности, основан способ их построения с помощью угольника и линейки.

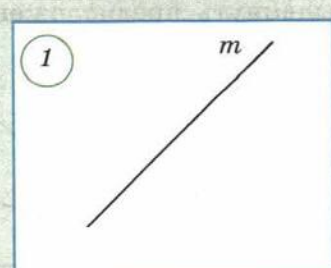
Название «параллельные» происходит от греческого слова *parallelos*, означающего «рядом идущие».

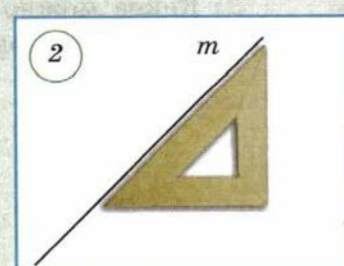
Для обозначения параллельности двух прямых древнегреческие математики использовали знак =. Однако, когда в XVIII в. этот знак стали использовать как знак равенства, параллельность стали обозначать с помощью знака $\parallel$.

Пусть дана некоторая прямая m (рис. (1)) и требуется начертить прямую, ей параллельную. Для этого:

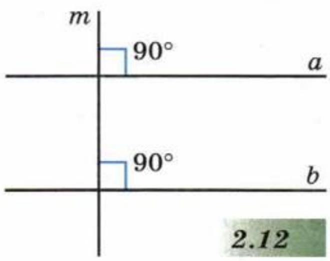
1) расположите вдоль прямой m одну сторону угольника (рис. (2));
2) зафиксируйте линейку вдоль другой стороны угольника (рис. (3));
3) передвиньте угольник вдоль линейки и проведите прямую (рис. (4)).

Построенная прямая параллельна данной прямой.





СНОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ На рисунке ***2.12*** построены прямые a и b, перпендикулярные одной и той же прямой m. Прямые a и b параллельны.

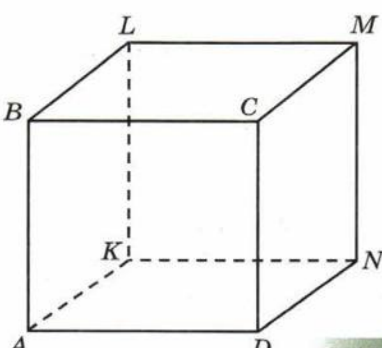


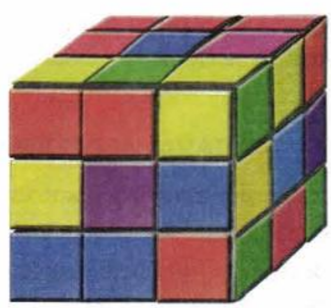
2.12

> **!** Если две прямые на плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

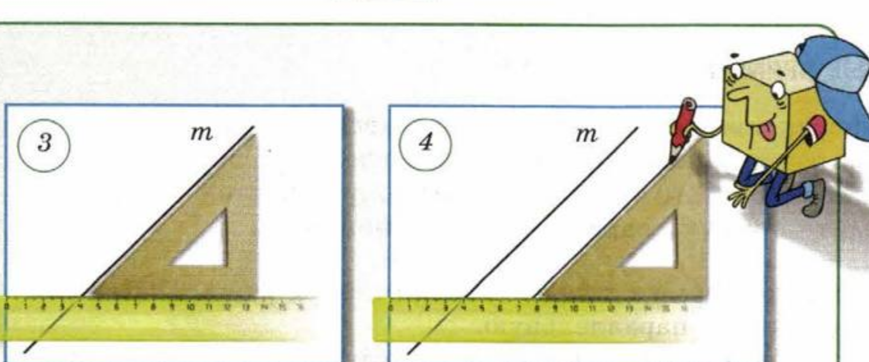
ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ Две прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны. В пространстве возможен ещё один случай взаимного расположения двух прямых.

Посмотрите на куб, изображённый на рисунке ***2.13.*** Рёбра AB и LM не параллельны, хотя прямые, которым они принадлежат, не пересекаются. Такие прямые называют *скрещивающимися*. Обратите внимание: скрещивающиеся прямые лежат в разных плоскостях.





2.13



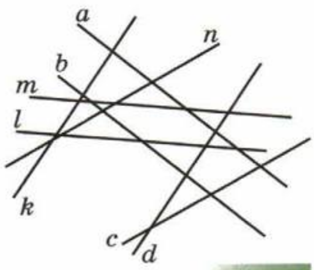
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- На рисунке ***2.13*** изображён куб. Назовите рёбра: а) параллельные ребру *AB*; ребру *DN*; б) перпендикулярные рёбрам *AB* и *CD*; *LM* и *BC*.
- Являются ли скрещивающимися прямые *AD* и *MN*? прямые *BL* и *DN* (рис. ***2.13***)?
- Возьмите модель пирамиды. Какие рёбра пирамиды лежат на скрещивающихся прямых?
- Приведите примеры параллельных и скрещивающихся прямых, которые встречаются в комнате, на улице.

УПРАЖНЕНИЯ

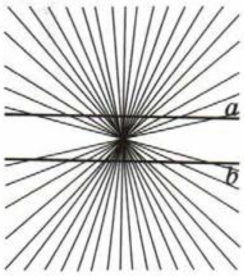
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

86 Найдите на рисунке ***2.14*** четыре пары параллельных прямых. Выпишите эти пары, используя знак ‖. Назовите пары прямых, которые пересекают прямую a под одним и тем же углом.

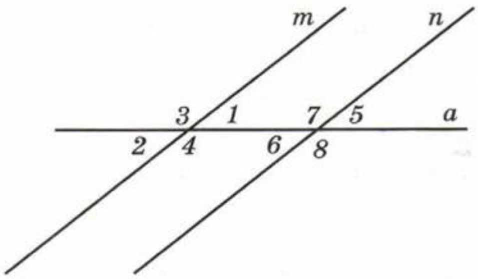


2.14

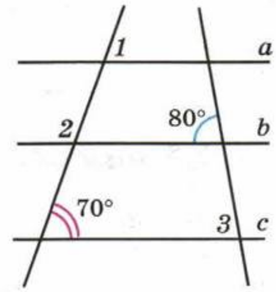
87 Определите на глаз, параллельны ли прямые a и b (рис. ***2.15***), и проверьте себя с помощью инструментов.



2.15



2.16



2.17

88 Прямые m и n параллельны (рис. ***2.16***), $\angle 1 = 38^\circ$. Найдите величины остальных углов, обозначенных цифрами.

89 Прямые a, b и c параллельны (рис. ***2.17***). Известны величины двух углов. Найдите величины углов 1, 2 и 3.

90

ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Изобразите все случаи взаимного расположения трёх прямых на плоскости (всего их 4). Чему равно наибольшее число точек пересечения?

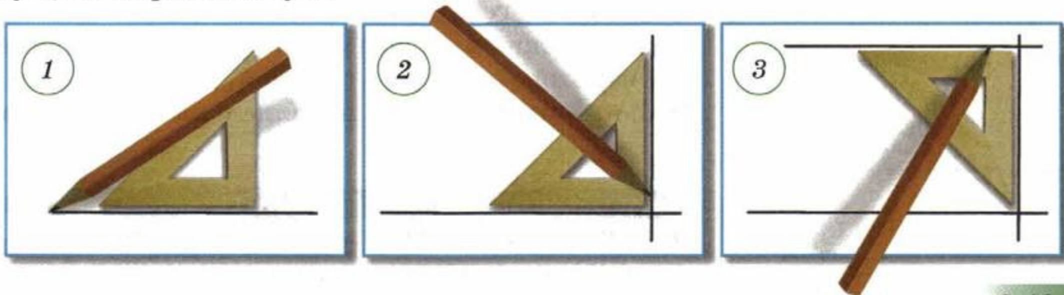
2) На плоскости проведены четыре прямые. Какое наибольшее число точек пересечения могло получиться?

СТРОИМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

91 а) Проведите какую-нибудь прямую и обозначьте её буквой b. С помощью линейки и угольника постройте несколько прямых, параллельных прямой b.
б) Проведите прямую a и отметьте точку K, не лежащую на этой прямой. Через точку K проведите прямую, параллельную прямой a.

92 Возьмите лист нелинованной бумаги и проведите на нём прямую. Перегибая лист, постройте прямую, ей параллельную.
Подсказка. Воспользуйтесь тем, что прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

93 На рисунке ***2.18*** показан способ построения прямой, параллельной данной, с помощью одного угольника. На каком свойстве параллельных прямых основан этот способ?
Начертите какую-нибудь прямую и постройте с помощью угольника прямую, ей параллельную.



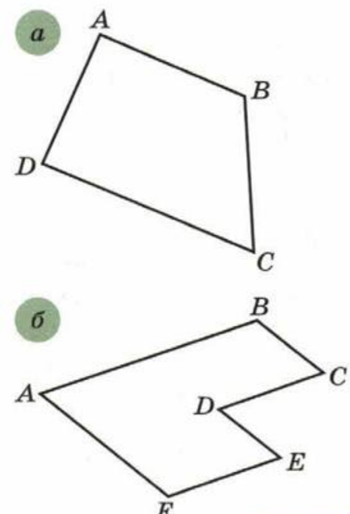
2.18

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ

94 Какие стороны многоугольника параллельны (рис. ***2.19***)? Воспользуйтесь угольником и линейкой.

95 Какие отрезки вы бы назвали параллельными?
А. Отрезки, которые не пересекаются.
Б. Отрезки, которые лежат на параллельных прямых.
Обоснуйте свой ответ. Сделайте рисунок.

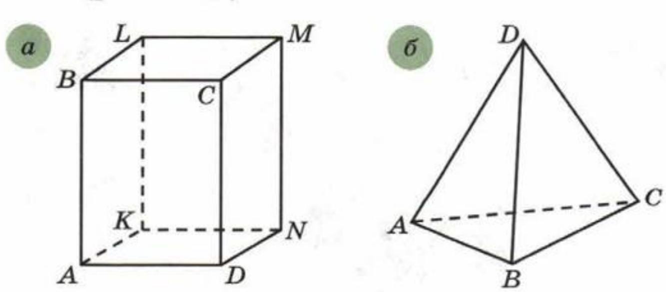
96 Постройте четырёхугольник $ABCD$, у которого:
а) $AB \parallel CD$ и $CB \parallel AD$;
б) $AB \nparallel CD$ и $CB \nparallel AD$;
в) $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$ и $BC \nparallel AD$.



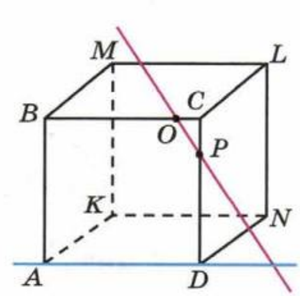
2.19

ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

97 Назовите рёбра многогранника, принадлежащие скрещивающимся прямым (рис. ***2.20***).



2.20



2.21

98 На рёбрах куба взяты точки O и P (рис. ***2.21***). Пересекает ли прямая OP следующие прямые: AD, DN, KN, BM, MK, LN, AB?
Указание. Если необходимо, воспользуйтесь моделью куба.

8 РАССТОЯНИЕ

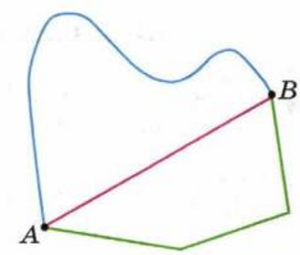
ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как найти расстояние:
  – между двумя точками;
  – от точки до прямой;
  – между двумя параллельными прямыми;
  – от точки до плоскости

В древних системах мер единицей измерения расстояний был стадий (греч. Στάδιον). Появился он в Вавилоне, а название получил в Греции. Стадий представлял собой расстояние, проходимое человеком спокойным шагом за время восхода солнца (от момента появления над горизонтом краешка солнечного диска до полного его появления), т. е. в течение 2 мин. Встречаются различные значения стадия: вавилонский – 194 м, греческий – 178 м, олимпийский – 192 м и др.

Вам, конечно, не раз приходилось слышать и употреблять слово «расстояние». Что же такое расстояние? Самый простой случай — это расстояние между двумя точками. В геометрии говорят о расстоянии и в других, более сложных случаях, например: расстояние от точки до некоторой фигуры (прямой, окружности и др.), расстояние между двумя параллельными прямыми.

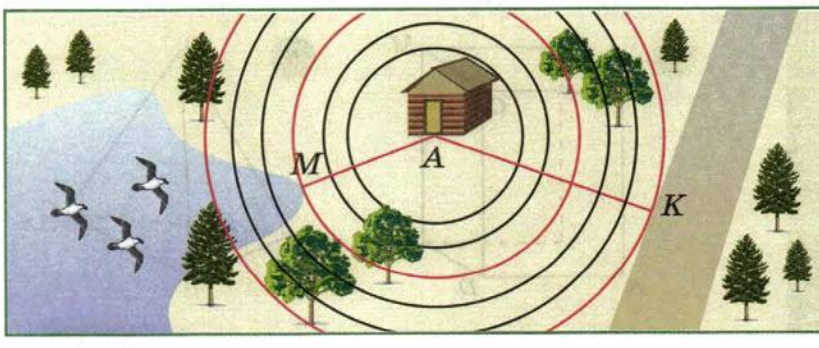
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ Возьмём две точки A и B. Существует бесконечно много линий на плоскости, двигаясь по которым можно из точки A попасть в точку B. Несколько таких линий изображено на рисунке **2.22**. Самый короткий путь из точки A в точку B — отрезок AB. Его длина и есть расстояние между точками A и B.



2.22

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ФИГУРЫ Расстояние — это всегда длина кратчайшего пути.

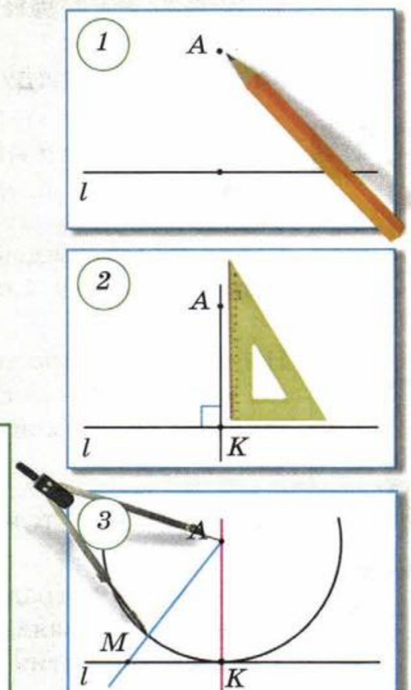
На плане, изображённом на рисунке **2.23**, вы видите дом лесника. Как проложить кратчайший путь от дома лесника до озера? Будем проводить окружности с центром в точке A, увеличивая их радиусы, пока одна из них «не достигнет» озера. В результате найдём точку озера, ближайшую к дому лесника. На плане это точка M. Длина отрезка AM и есть расстояние от дома лесника до озера.



2.23

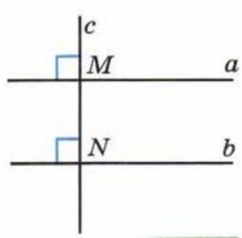
Пусть теперь нужно найти расстояние от дома до шоссе. (Шоссе проходит здесь строго по прямой.)

Изобразите дом лесника и шоссе схематически точкой A и прямой l (рис. 1). Чтобы определить расстояние от точки A до прямой l, нужно найти ближайшую к A точку этой прямой. Для этого проведите через точку A прямую, перпендикулярную прямой l, и обозначьте точку их пересечения буквой K (рис. 2). Хорошо видно, что отрезок AK короче любого другого отрезка, соединяющего точку A с точкой прямой l (рис. 3). Значит, K и есть ближайшая к A точка этой прямой.



Расстояние от точки до прямой измеряется по перпендикуляру, проведённому из этой точки к прямой.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ На рисунке **2.24** проведены две параллельные прямые a и b и прямая c — их общий перпендикуляр. Длина отрезка MN будет одной и той же, в каком бы месте ни был проведён перпендикуляр c. Длину этого отрезка и называют *расстоянием между параллельными прямыми*.

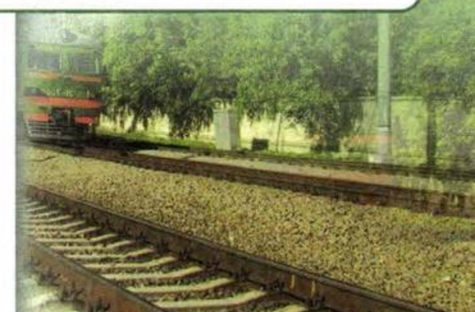


2.24

Рельсы на прямолинейном участке железнодорожного пути должны быть параллельными: они не могут сближаться или удаляться. Поэтому их крепят к шпалам на одном и том же расстоянии друг от друга. Это расстояние называют шириной колеи.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ Если надо найти расстояние от точки до плоскости, его тоже измеряют по перпендикуляру. Посмотрите на куб, изображённый на рисунке **2.25**: ребро AB перпендикулярно грани $AKND$, расстояние от точки B до плоскости $AKND$ равно длине ребра AB; ребро BC перпендикулярно грани $CMND$, расстояние от точки B до грани $CMND$ равно длине ребра BC.

2.25



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Отметьте точку O и постройте пять точек, находящихся от неё на расстоянии 3 см.

  а) Что представляет собой множество всех точек плоскости, удалённых от точки O на 3 см?

  б) Покажите штриховкой множество всех точек, расположенных от точки O на расстоянии, большем 2 см и меньшем 3 см.

- Как измеряется расстояние от точки до прямой?

УПРАЖНЕНИЯ

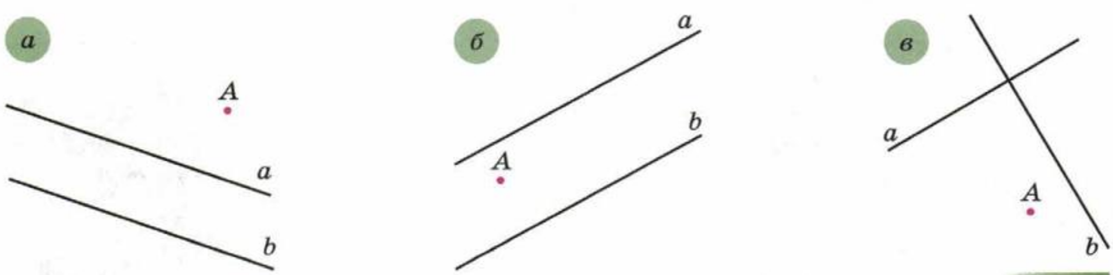
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

99 Отметьте отрезок AB длиной 5 см. Проведите окружность с центром в точке A радиусом 3 см и окружность с центром в точке B радиусом 4 см. Обозначьте одну из точек пересечения окружностей буквой K.
Верно ли утверждение: «Точка K находится на расстоянии 3 см от точки A и на расстоянии 4 см от точки B»? Объясните почему.

100 Постройте четыре точки A, B, C и D по следующему условию: $AB = 8$ см, $AC = 4$ см, $CB = 8$ см, $AD = 6$ см, $DB = 4$ см, точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Измерьте расстояние между точками C и D.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

101 Проведите в тетради прямую, не совпадающую с линиями сетки. Отметьте две точки, взяв их по разные стороны от прямой. Найдите расстояние от каждой из этих точек до прямой. Введите необходимые обозначения и запишите ответ.



2.26

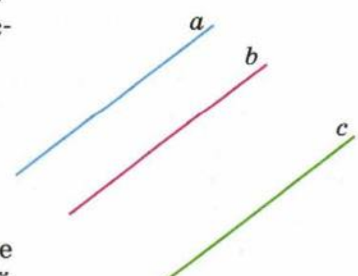
102 Найдите расстояние от точки A до прямой a и до прямой b (рис. **2.26**).

103 Начертите какую-нибудь окружность и прямую, её не пересекающую. Найдите расстояние от центра окружности до прямой. Отметьте на окружности точку, ближайшую к данной прямой.

104 Начертите какую-нибудь прямую AB. Постройте несколько точек, находящихся от прямой AB на расстоянии 2 см. Где расположены все такие точки?

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ

105 На рисунке **2.27** изображены три параллельные прямые. Найдите расстояние между каждой парой этих прямых.



2.27

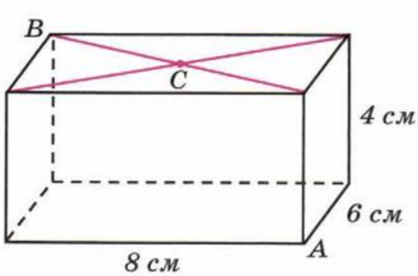
106 а) Начертите с помощью линейки и угольника две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 4 см.
б) Начертите четыре параллельные прямые, увеличивая расстояние между двумя соседними прямыми на 5 мм.

107 По одну сторону от прямой l расположены точки A, B, C и D. Расстояния от этих точек до прямой соответственно равны 4 см 3 мм, 4 см 1 мм, 3 см 9 мм и 4 см 6 мм. Через точку A проведена прямая, параллельная l. Какие из отрезков BC, CD и DB эта прямая пересекает, а какие нет?

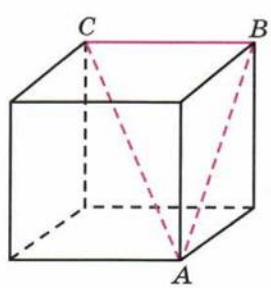
108 Расстояние между параллельными прямыми m и n равно 5 см. Точка A находится на расстоянии 3 см от прямой m. Определите расстояние от точки A до прямой n. Сколько случаев надо рассмотреть?

РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

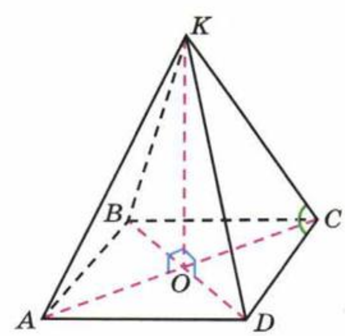
109 На рисунке ***2.28*** изображён параллелепипед. Найдите расстояние:
а) от вершины B до передней грани параллелепипеда; до его нижней грани;
б) от вершины A до задней грани; до левой боковой грани;
в) от точки C до передней грани; до нижней грани.



2.28



2.29



2.30

110 а) Что больше: диагональ прямоугольника или его сторона?
б) Какой из отрезков самый длинный: ребро куба BC, диагональ грани AB или диагональ куба AC (рис. ***2.29***)? Какой из этих отрезков самый короткий?

111 На рисунке ***2.30*** изображена пирамида, в основании которой квадрат. Длине какого отрезка равно расстояние:
а) от вершины K до основания $ABCD$;
б) между рёбрами AD и BC, AB и CD;
в) от вершины K до диагонали основания AC?

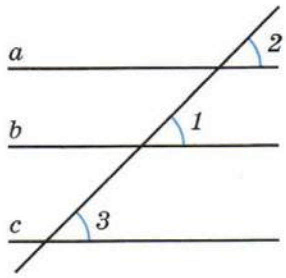
Неверно! Опровергните утверждение, сделав рисунок: «Расстояние от точки до треугольника равно расстоянию от этой точки до ближайшей вершины треугольника».

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 а) Каким свойством обладают вертикальные углы?
б) Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен $40°$. Найдите остальные углы.

2 Постройте прямые, пересекающиеся под углом $60°$.

3 Прямые a, b и c параллельны, $\angle 1 = 45°$. Найдите углы 2 и 3.



4 Постройте две перпендикулярные прямые.

5 Закончите предложение.
а) Если две прямые пересекаются под прямым углом, то они ... .
б) Если две прямые, лежащие в одной плоскости, перпендикулярны одной и той же прямой, то они ... .

6 Начертите прямую k и отметьте точку A, не лежащую на этой прямой. Проведите с помощью линейки и угольника через точку A прямую, перпендикулярную прямой k, и прямую, параллельную прямой k.

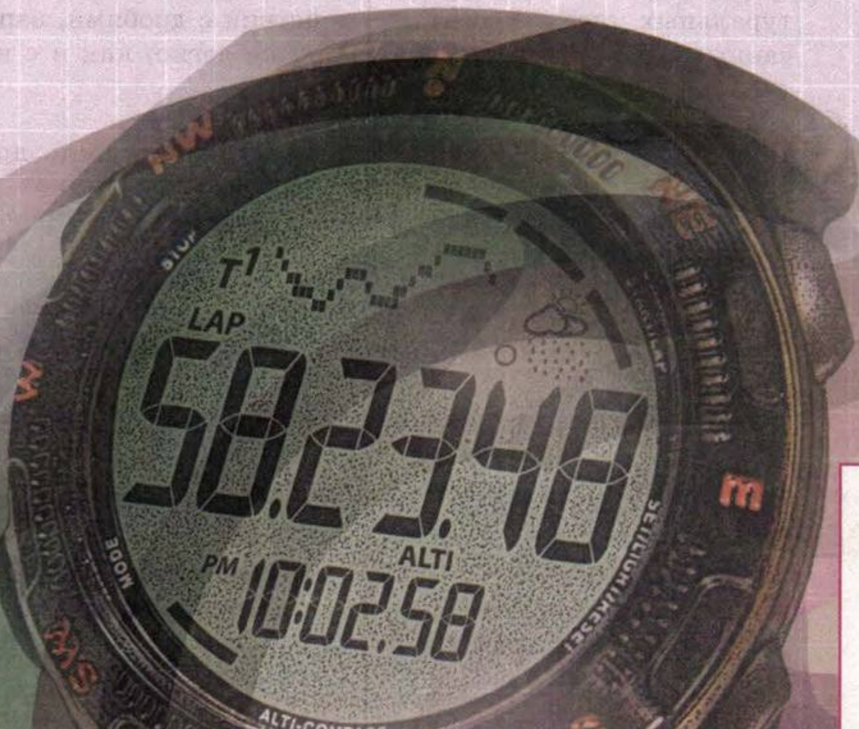
7 Начертите прямую l и отметьте точку A, не лежащую на этой прямой. Найдите расстояние от точки A до прямой l.

8 Расскажите, как найти расстояние между двумя параллельными прямыми.
Начертите две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 4 см.

глава 3

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

- КАКИЕ ДРОБИ НАЗЫВАЮТ ДЕСЯТИЧНЫМИ
- ПЕРЕВОД ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ В ДЕСЯТИЧНУЮ
- СРАВНЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ



ИНТЕРЕСНО

Нашим предкам нелегко давались дроби. В Средние века во многих европейских учебниках математики раздел о дробях помещался в самом конце. Английский просветитель Джон Керси (XVIII в.) объяснял это тем, что «доступ к крутым путям дробей» приводит некоторых учащихся в такое уныние, что они останавливаются и восклицают: «Non plus ultra!» Нетрудно догадаться, что в переводе с латыни это означает «Ничего более сверх!», т. е. «Дальше мы не пойдём!».

А у немцев в старину была поговорка «In die Brüche kommen», что в дословном переводе звучит как «Прийти в дроби», а означало это попасть в трудное положение.

9 КАКИЕ ДРОБИ НАЗЫВАЮТ ДЕСЯТИЧНЫМИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что десятичная система записи натуральных чисел распространяется и на запись дробей
- Какие разряды используются для десятичной записи дробных чисел

С развитием математики дроби стали использоваться не только для решения простейших практических задач, но и для более сложных расчётов. Однако правила действий с дробями, как вы могли уже убедиться сами, достаточно сложны. И математики придумали способ, позволяющий упростить вычисления: для дробей со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д., которые имели большое практическое значение, они стали применять так называемую десятичную запись, похожую на запись натуральных чисел. Выполнять действия с дробями, записанными в таком виде, почти так же легко, как и с натуральными числами.

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ДРОБЕЙ Если знаменатель дроби — единица с нулями, то для неё применяют не «двухэтажную» запись, а запись в строчку, без явного указания знаменателя.

Например:

вместо $\frac{3}{10}$ пишут 0,3 и читают «0 целых 3 десятых»;

вместо $4\frac{27}{100}$ пишут 4,27 и читают «4 целых 27 сотых»;

вместо $10\frac{125}{1000}$ пишут 10,125 и читают «10 целых 125 тысячных».

Такие записи называют **десятичными дробями.** А дроби, записанные с помощью дробной черты, называют **обыкновенными дробями.**

В десятичной дроби после запятой столько цифр, сколько нулей в знаменателе соответствующей ей обыкновенной дроби. Например:

$2\frac{3}{10} = 2{,}3$

1 нуль 1 цифра

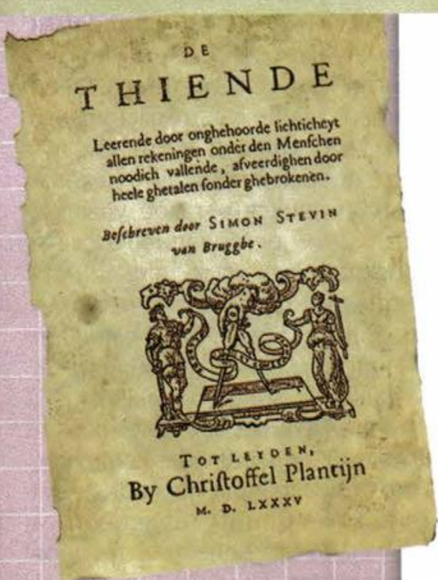
$2\frac{37}{100} = 2{,}37$

2 нуля 2 цифры

$2\frac{374}{1000} = 2{,}374$

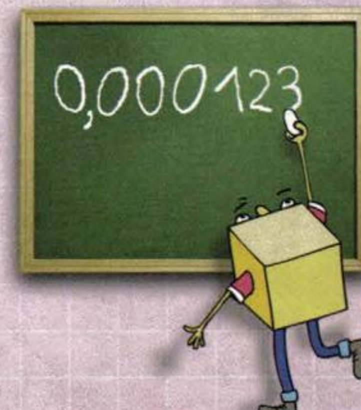
3 нуля 3 цифры

Впервые учение о десятичных дробях в XV в. изложил среднеазиатский учёный аль-Каши в книге «Ключ арифметики». В Европе десятичные дроби в XVI в. заново открыл нидерландский учёный и инженер Симон Стевин, описавший их теорию в книге «Десятая».


DE
THIENDE
Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.
Beſchreven door SIMON STEVIN van Brugghe.
TOT LEYDEN,
By Chriſtoffel Plantijn
M. D. LXXXV

Способ записи десятичных дробей является естественным обобщением десятичной системы счисления, принятой для записи натуральных чисел. В записи натурального числа значение цифры определяется тем, в каком разряде она находится. Единицы двух соседних разрядов различаются в 10 раз. Цифра 0 говорит об отсутствии единиц соответствующего разряда. Например, в числе 2408 содержится 2 тысячи, 4 сотни, 0 десятков и 8 единиц:

$$2408 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8.$$



Для записи десятичных дробей используют новые разряды, в которых указывают доли единицы. В первом разряде после запятой указывают число десятых долей; его так и называют — **разряд десятых**. Во втором указывают число сотых долей — это **разряд сотых**. Третьим идёт **разряд тысячных** и т. д. (рис. *3.1*).

3.1

Знаки, стоящие в десятичной дроби после запятой, называют **десятичными знаками**.

Что, например, означает запись 7,35? Как её прочитать?

В числе 7,35 содержится 7 единиц, 3 десятых и 5 сотых. Представив это число в виде суммы разрядных слагаемых, получим

$$7{,}35 = 7 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} = 7 + \frac{30}{100} + \frac{5}{100} = 7 + \frac{35}{100} = 7\frac{35}{100}.$$

Таким образом, 7,35 — это десятичное представление смешанной дроби $7\frac{35}{100}$. Читается десятичная дробь 7,35 так же, как и число $7\frac{35}{100}$: «7 целых 35 сотых».

! Десятичную дробь читают следующим образом:
- сначала читают её часть, стоящую до запятой, и добавляют слово «целых»;
- затем читают часть, стоящую после запятой, и добавляют название последнего разряда.

Например, в десятичной дроби 0,0105 последний разряд — это десятитысячные. Поэтому читается она так: «0 целых 105 десятитысячных».

ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ ДРОБИ К ДРУГОЙ

Чтобы перейти от десятичной дроби к соответствующей обыкновенной, достаточно её прочитать и записать знаменатель дробной части в явном виде. Например, десятичная дробь 3,047 читается «3 целых 47 тысячных». Записав дробную часть со знаменателем, получим число $3\frac{47}{1000}$. Таким образом,

$$3{,}047 = 3\frac{47}{1000}.$$

А как перейти от обыкновенной дроби со знаменателем 10, 100, 1000 и т. д. к десятичной? Как, например, записать в виде десятичной дроби число $\frac{187}{100\,000}$?

В знаменателе этой дроби 5 нулей, поэтому в десятичной дроби должно быть 5 цифр после запятой. Но в числителе дроби $\frac{187}{100\,000}$ только 3 цифры. Уравняем число цифр в числителе и число нулей в знаменателе, приписав к числителю слева вспомогательные нули, получим

$$\frac{187}{100\,000} = \frac{00187}{100\,000} = 0{,}00187.$$

Прошли века, прежде чем десятичные дроби приобрели современный вид. Симон Стевин дробь 35,912 записывал так: 35⓪9①1②2③. Теперь для отделения целой части от дробной мы ставим запятую. А в некоторых странах, например в Англии и США, вместо запятой ставят точку. Вы могли увидеть точку в записи десятичной дроби, пользуясь калькулятором или компьютером.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ ТОЧКАМИ КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

Десятичные дроби, так же как и обыкновенные дроби, изображают точками на координатной прямой.

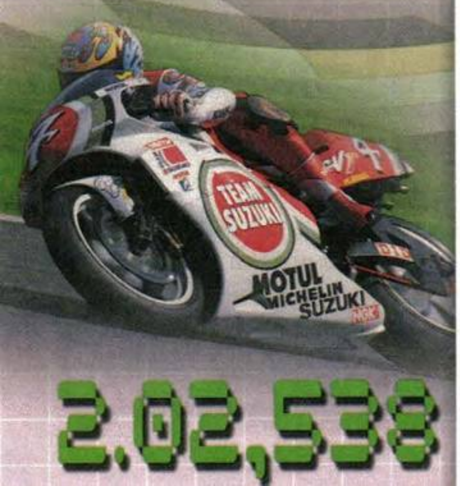
Построим точки, соответствующие числам: а) 0,3; б) 0,36; в) 0,364.

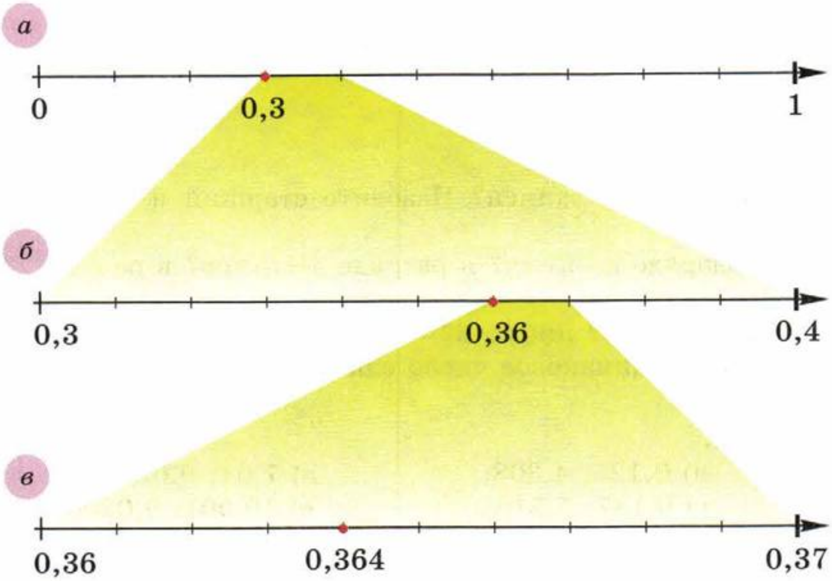
Начертим координатную прямую и выберем такой единичный отрезок, который удобно делить на 10 равных частей.

а) Чтобы построить точку, соответствующую числу 0,3, разделим отрезок между точками 0 и 1 на 10 равных частей и отсчитаем от точки 0 три такие части (рис. *3.2, а*).

б) Чтобы построить точку, соответствующую десятичной дроби 0,36, разделим на 10 равных частей десятую долю единичного отрезка, которая заключена между точками 0,3 и 0,4. Получим сотые доли единичного отрезка. Отсчитав от точки 0,3 шесть сотых долей, отметим точку с координатой 0,36 (рис. *3.2, б*).

в) Чтобы построить точку, соответствующую десятичной дроби 0,364, разделим на 10 равных частей сотую часть единичного отрезка, которая заключена между точками 0,36 и 0,37. Затем отсчитаем от точки 0,36 четыре тысячные доли единичного отрезка (рис. *3.2, в*).





3.2

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ И МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР Десятичные дроби появились в математике гораздо раньше, чем современные единицы измерения — метры и граммы. Удобство обращения с десятичными дробями привело к тому, что математическое изобретение — десятичные дроби — повлияло на всю деятельность людей, связанную с измерениями: люди перешли на единую систему измерения величин — так называемую *метрическую систему мер*.

В метрической системе мер одна единица отличается от другой в 10, 100, 1000 и т. д. раз. Именно так обстоит дело с единицами длины и массы.

Вам известны соотношения, с помощью которых одни единицы длины выражаются через другие, более мелкие. Например:

1 см = 10 мм, 1 м = 100 см, 1 км = 1000 м.

Используя десятичные дроби, можно записать другие соотношения, связывающие эти же единицы длины:

1 мм = 0,1 см, 1 см = 0,01 м, 1 м = 0,001 км.

Такие же равенства можно записать и с единицами измерения массы — тоннами, килограммами, граммами:

1 мг = 0,001 г, 1 г = 0,001 кг, 1 кг = 0,001 т.

Десятичные соотношения между различными метрическими единицами отражены в их названиях. Так, известные приставки **деци, санти, милли** произошли от латинских слов *decima*, *centesima*, *millesima* (одна десятая, одна сотая, одна тысячная).

В системе измерения времени и углов сохранились древние традиции: например, час делится на 60 минут, минута — на 60 секунд. Интересно отметить, что в современном спорте, где секунда оказалась слишком большой единицей для измерения результатов, используется смешанная система измерения времени. Секунду делят не на 60 равных частей, а на десятые, сотые и тысячные. Так, результат саночника 1.02,343 означает, что он прошёл трассу за 1 минуту 2 и 343 тысячных секунды.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие разряды содержатся в десятичной дроби 12,0345? Прочитайте её.
- Сколько цифр после запятой должно содержаться в десятичной дроби, если знаменатель соответствующей ей обыкновенной дроби равен 1000? Приведите пример.
- Выразите в метрах 5 дм 4 см.

УПРАЖНЕНИЯ

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ДРОБЕЙ

112 Рассмотрите десятичную дробь 687,02569.
1) Какие разряды содержатся в этой записи? Назовите старший и младший разряды.
2) Какая цифра записана в разряде десятых? в разряде десятков? в разряде тысячных?
3) В каком разряде записана цифра 8? цифра 2?
4) В каких разрядах содержится одинаковое число единиц?

113 Прочитайте десятичные дроби:
а) 1,4; 2,8; 0,1;
б) 6,22; 0,14; 9,71;
в) 0,125; 4,308;
г) 6,147; 1,218;
д) 7,04; 0,025;
е) 10,001; 0,0208.

114 Запишите десятичную дробь:
а) нуль целых одна десятая;
б) нуль целых сорок семь сотых.

115 а) В числе 54038 отделите запятой одну цифру справа и прочитайте получившуюся десятичную дробь. Последовательно сдвигайте эту запятую на одну цифру влево и каждый раз читайте десятичную дробь.
б) В числе 6,012345 последовательно сдвигайте запятую на одну цифру вправо. Читайте каждую получившуюся десятичную дробь.

116 Прочитайте десятичную дробь и запишите её в виде обыкновенной дроби или смешанной дроби:
а) 0,9; б) 0,123; в) 0,03; г) 0,027; д) 10,1; е) 12,10002; ж) 6,009.

117 Запишите в виде десятичной дроби и прочитайте её:
а) $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{2}{10\,000}$;
б) $\frac{11}{100}$, $\frac{27}{1000}$, $\frac{139}{10\,000}$, $\frac{907}{100\,000}$.

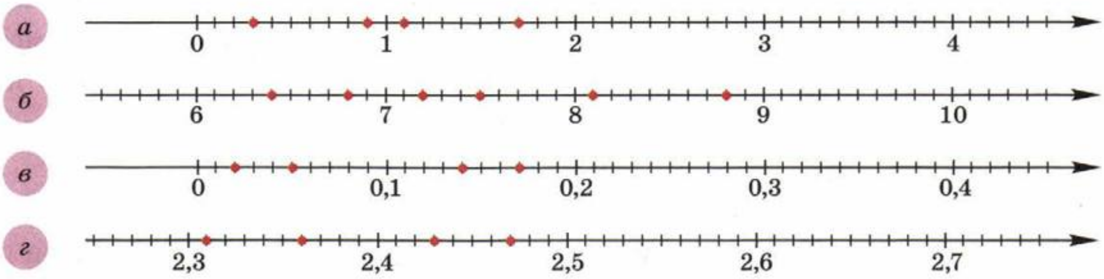
118 Запишите в виде десятичных дробей следующие обыкновенные дроби:
$$\frac{173}{10},\ \frac{173}{100},\ \frac{173}{1000},\ \frac{173}{10\,000},\ \frac{173}{100\,000}.$$

119 Запишите в виде десятичной дроби и прочитайте её:
а) $2\frac{18}{100}$, $5\frac{3}{100}$, $1\frac{238}{1000}$, $8\frac{8}{1000}$;
б) $\frac{39}{10}$, $\frac{187}{10}$, $\frac{341}{100}$, $\frac{1002}{1000}$.

120 Запишите все десятичные дроби, которые можно составить из цифр 1, 2 и 3, соблюдая следующее условие: каждая цифра используется в записи числа не более одного раза (это означает, что цифру можно вообще не использовать или использовать только один раз). Сколько десятичных дробей у вас получилось?

ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

121 Какие числа отмечены точками на координатной прямой (рис. *3.3*)?



3.3

122 Начертите координатную прямую, взяв за единичный отрезок 10 клеток. Отметьте точку, соответствующую числу:
а) 0,1; б) 0,5; в) 0,7; г) 1,2; д) 1,4; е) 1,8.

123 Начертите координатную прямую, приняв за единичный отрезок 8 клеток. Отметьте на этой прямой число:
а) 0,5; б) 0,75; в) 1,5; г) 1,25; д) 0,125.

ПЕРЕХОД ОТ ОДНИХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ К ДРУГИМ

124 Какую часть составляет:
а) 1 см от 1 м; 1 м от 1 км; 1 мм от 1 см; 1 дм от 1 м;
б) 1 г от 1 кг; 1 кг от 1 т; 1 кг от 1 ц; 1 мг от 1 г?

125 а) Выразите в метрах: 3 дм; 8 дм; 2 см; 5 см; 4 мм; 7 мм.
б) Выразите в дециметрах: 6 см; 3 см; 9 мм; 4 мм.
в) Выразите в километрах: 123 м; 450 м; 600 м; 75 м; 10 м.
Образец. Выразим 7 дм в метрах:

$$1 \text{ дм} = \frac{1}{10} \text{ м, а } 7 \text{ дм} = \frac{7}{10} \text{ м} = 0{,}7 \text{ м}.$$

126 а) Выразите в сантиметрах и миллиметрах: 5,3 см; 54,8 см; 4,6 см.
б) Выразите в килограммах и граммах: 2,325 кг; 4,25 кг; 3,5 кг.

127 В 3 м 8 дм 1 см содержится 3 целых 8 десятых и 1 сотая метра, т. е. 3 м 8 дм 1 см = 3,81 м. Рассуждая таким же образом, выразите:
а) в метрах: 4 м 7 дм 5 см; 12 м 2 дм 1 см; 3 дм 6 см 9 мм; 1 м 8 см;
б) в дециметрах: 8 дм 2 см 3 мм; 7 м 2 дм 6 мм; 2 м 7 см; 1 м 3 дм 4 см 6 мм.

Неверно! Какие из приведённых равенств неверны? Исправьте их.

1 кг 70 г = 1,7 кг, 2 т 340 кг = 2,034 т, 850 г = 0,85 кг.

10 ПЕРЕВОД ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ В ДЕСЯТИЧНУЮ

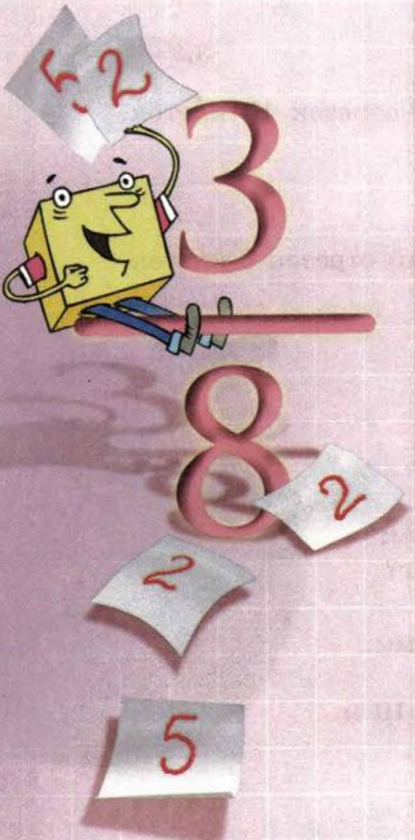
ВЫ УЗНАЕТЕ

- В каком случае данная обыкновенная дробь обращается в десятичную

Десятичные и обыкновенные дроби — это две различные формы представления чисел. Например, $\frac{3}{100}$ и 0,03 — два разных способа записи одного и того же числа. Именно это мы показываем, записывая равенство $\frac{3}{100} = 0{,}03$.

Однако не всякое число можно записать и в виде десятичной, и в виде обыкновенной дроби. Если число выражено десятичной дробью, то его всегда можно представить и в виде обыкновенной дроби. Для этого, как вы знаете, нужно просто записать знаменатель дробной части в явном виде.

Но не всегда число, выраженное обыкновенной дробью, можно записать в виде десятичной дроби.



КАКУЮ ОБЫКНОВЕННУЮ ДРОБЬ МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОЙ, А КАКУЮ НЕТ Чтобы записать обыкновенную дробь в виде десятичной, нужно привести её к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д. При разложении каждого из этих чисел на простые множители получается одинаковое число двоек и пятёрок:

$$10 = 2 \cdot 5;$$
$$100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5;$$
$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$$

и т. д.

Никаких других множителей эти разложения не содержат.

Возьмём дробь $\frac{3}{8}$. При разложении её знаменателя на простые множители получается произведение $2 \cdot 2 \cdot 2$. Если домножить его на три пятёрки, то получится один из знаменателей указанного ряда — число 1000, т. е. дробь $\frac{3}{8}$ можно представить в виде десятичной. Получим

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{375}{1000} = 0{,}375.$$

Проведённое рассуждение подсказывает вывод.

! Если знаменатель обыкновенной дроби не имеет никаких простых делителей, кроме 2 и 5, то эту обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной.

Пример. Представим дробь $\frac{3}{40}$ в виде десятичной:

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{8 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{(2^3 \cdot 5) \cdot 5^2} = \frac{75}{1000} = 0{,}075.$$

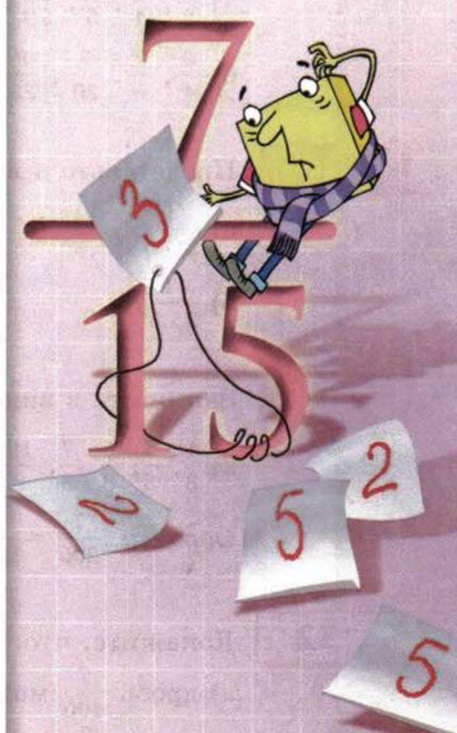
$10 = 2 \cdot 5$
$100 = 2^2 \cdot 5^2$
$1000 = 2^3 \cdot 5^3$
$10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$

$50 = 5^2 \cdot 2$
$250 = 5^3 \cdot 2$
$1250 = 5^4 \cdot 2$

$20 = 2^2 \cdot 5$
$40 = 2^3 \cdot 5$
$80 = 2^4 \cdot 5$
$160 = 2^5 \cdot 5$

Иначе обстоит дело с дробью $\frac{7}{15}$. Разложив на простые множители знаменатель этой дроби, получим произведение $3 \cdot 5$, содержащее число 3. На какие бы целые числа ни домножали знаменатель, множитель 3 всегда будет присутствовать, поэтому произведение только из двоек и пятёрок никогда не получится. Значит, дробь $\frac{7}{15}$ нельзя привести ни к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д., т. е. её нельзя представить в виде десятичной.

Если знаменатель обыкновенной дроби имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, и эта дробь несократима, то её нельзя представить в виде десятичной.



В последнем утверждении речь идёт только о несократимых дробях. И это не случайно. Возьмём, например, дробь $\frac{21}{60}$. Её знаменатель содержит простой множитель 3.

Однако после сокращения дроби он «исчезнет», и эту дробь можно будет записать в виде десятичной:

$$\frac{21}{60} = \frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35.$$

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ Некоторые дроби особенно часто встречаются в задачах, в практических расчётах. Это, например, такие дроби, как $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$. Их десятичные представления полезно помнить. Они приведены в следующей таблице:

Обыкновенная дробь	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$
Десятичная дробь	0,5	0,25	0,2	0,125

Представьте самостоятельно каждую обыкновенную дробь, приведённую в таблице, в виде десятичной и запомните результаты.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Всякую ли десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной? Поясните ответ и проиллюстрируйте его примерами.
- Всякую ли обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНЫХ

128 Выберите дроби, которые можно представить в виде десятичных:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$.

129 Приведите дроби к одному из знаменателей 10, 100 или 1000 и запишите соответствующие десятичные дроби:

а) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$;

б) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{3}{50}$, $\frac{11}{500}$;

в) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $1\frac{7}{20}$, $4\frac{4}{25}$;

г) $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{63}{20}$, $\frac{51}{25}$.

130 Представьте в виде десятичной дроби:

а) $\frac{1}{2^2 \cdot 5}$;

б) $\frac{1}{2 \cdot 5^2}$;

в) $\frac{1}{2^3}$;

г) $\frac{1}{5^3}$;

д) $\frac{1}{2 \cdot 5^3}$;

е) $\frac{1}{5 \cdot 2^4}$;

ж) $\frac{1}{2^5 \cdot 5^3}$;

з) $\frac{1}{5^4 \cdot 2^5}$.

131 Запишите в виде десятичных дробей:

а) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{19}{8}$;

б) $\frac{1}{200}$, $\frac{9}{200}$, $\frac{21}{200}$, $\frac{201}{200}$;

в) $\frac{1}{125}$, $\frac{4}{125}$, $\frac{31}{125}$, $\frac{129}{125}$.

Образец. $\frac{7}{200} = \frac{7 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{35}{1000} = 0{,}035$; $\frac{3}{125} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{24}{1000} = 0{,}024$.

132 Докажите, что:

а) дробь $\frac{7}{400}$ можно представить в виде десятичной дроби;

б) дробь $\frac{7}{420}$ нельзя представить в виде десятичной дроби.

133 Определите, можно ли записать данную обыкновенную дробь в виде десятичной (если да, то запишите):

а) $\frac{19}{450}$;

б) $\frac{7}{625}$;

в) $\frac{3}{160}$;

г) $\frac{53}{750}$.

134 Представьте дробь в виде десятичной:

а) $\frac{12}{60}$;

б) $\frac{18}{90}$;

в) $\frac{54}{300}$;

г) $\frac{22}{110}$;

д) $\frac{32}{400}$;

е) $\frac{42}{700}$.

Образец. $\frac{48}{300} = \frac{16}{100} = 0{,}16$.

135 Выпишите дроби, которые можно представить в виде десятичных:

$$\frac{8}{24},\ \frac{6}{24},\ \frac{14}{35},\ \frac{10}{35},\ \frac{32}{48},\ \frac{36}{48}.$$

136 Запишите частное в виде обыкновенной дроби и, если возможно, обратите её в десятичную:

а) 15 : 2; г) 9 : 6; ж) 8 : 12; к) 12 : 18;
б) 23 : 5; д) 25 : 15; з) 19 : 9; л) 5 : 8;
в) 37 : 25; е) 32 : 6; и) 6 : 15; м) 10 : 30.

СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

137 Обратите десятичную дробь в обыкновенную и найдите значение выражения:

а) $\frac{2}{3} + 0,5$; в) $\frac{1}{3} \cdot 0,9$; д) $\frac{3}{16} \cdot 0,16$;
б) $0,6 - \frac{2}{5}$; г) $0,4 : \frac{2}{7}$; е) $\frac{9}{20} : 0,03$.

138 Не выполняя вычислений, для каждого выражения из первой строки подберите равное ему выражение из второй и запишите соответствующие равенства:

$\frac{3}{4} - 0,5$; $\frac{1}{4} - 0,2$; $\frac{1}{2} - 0,125$;

$0,5 - \frac{1}{8}$; $0,75 - \frac{1}{2}$; $0,25 - \frac{1}{5}$.

ВЫРАЖЕНИЕ ВЕЛИЧИН ДРОБЯМИ

139 а) Выразите десятичной дробью каждую величину:
$\frac{1}{4}$ кг, $\frac{3}{4}$ кг, $\frac{2}{5}$ кг, $\frac{5}{8}$ кг.

б) Выразите обыкновенной дробью каждую величину:
0,2 кг, 0,6 кг, 0,25 кг, 0,375 кг.

140 Выразите время в часах сначала обыкновенной дробью, а затем, если можно, десятичной:

а) 30 мин; в) 24 мин; д) 10 мин; ж) 35 мин;
б) 6 мин; г) 15 мин; е) 20 мин; з) 42 мин.

141 Выразите время в часах и, если возможно, запишите ответ в виде десятичной дроби:

а) 1 ч 12 мин; в) 10 ч 45 мин; д) 3 ч 50 мин;
б) 2 ч 30 мин; г) 1 ч 40 мин; е) 2 ч 48 мин.

11 СРАВНЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как сравнивают десятичные дроби
- Как можно сравнить обыкновенную дробь и десятичную

Мы уже говорили о том, что с десятичными дробями работать легче, чем с обыкновенными. Это преимущество становится очевидным уже при рассмотрении вопроса о сравнении дробей.

РАВНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ Вы знаете, что представить число в виде обыкновенной дроби можно разными способами. Так же обстоит дело и при записи чисел в виде десятичных дробей. Например, две десятичные дроби 0,3 и 0,30 обозначают одно и то же число. В самом деле, заменим каждую из этих десятичных дробей обыкновенной дробью, получим

$$0{,}3 = \frac{3}{10} \text{ и } 0{,}30 = \frac{30}{100}.$$

По основному свойству дроби $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$. Поэтому $0{,}3 = 0{,}30$.

Точно так же можно показать, что, например,

$$1{,}5 = 1{,}50 = 1{,}500 = 1{,}5000.$$

Понятно, что *нули, записанные в конце десятичной дроби, можно отбросить*. Например:

$$7{,}80 = 7{,}8; \; 0{,}04100 = 0{,}041.$$

! Если к десятичной дроби приписать справа какое угодно количество нулей, то получится дробь, равная данной.
Если в десятичной дроби последние цифры — нули, то, отбросив их, получим дробь, равную данной.

Всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби, причём с каким угодно знаменателем. В частности, знаменателем может быть любая степень числа 10. Например:

$$7 = \frac{70}{10} = \frac{700}{100} = \frac{7000}{1000} = \ldots .$$

Поэтому любое натуральное число можно представить в виде десятичной дроби с каким угодно количеством нулей после запятой:

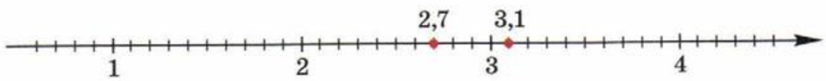
$$7 = 7{,}0 = 7{,}00 = 7{,}000 = \ldots .$$

ПОРАЗРЯДНОЕ СРАВНЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ Вы знаете, что две обыкновенные дроби легко сравнить, если у них одинаковые знаменатели. Если же знаменатели дробей различны, то нужно либо приводить их к общему знаменателю, либо пользоваться специальными приёмами.

А десятичные дроби, как и натуральные числа, сравнивают по разрядам. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Сравним десятичные дроби 2,7 и 3,1.

Так как 2 единицы меньше, чем 3 единицы, то $2{,}7 < 3{,}1$. Точка, изображающая на координатной прямой число 2,7, расположена левее (рис. ***3.4***).



3.4

Пример 2. Сравним десятичные дроби 1,8 и 1,42.

Целые части этих дробей одинаковы, но различаются цифры в разряде десятых: 8 десятых больше, чем 4 десятых. Поэтому $1{,}8 > 1{,}42$ (рис. ***3.5***).

3.5

Пример 3. Сравним десятичные дроби 2,5081 и 2,508.

Целые части этих дробей одинаковы; совпадают также первые три цифры после запятой. Но у дроби 2,5081 есть ещё и четвёртая цифра, а у дроби 2,508 соответствующий разряд отсутствует, поэтому

$$2{,}5081 > 2{,}508.$$

Чтобы сравнить дроби 2,5081 и 2,508, у которых число десятичных знаков различно, можно рассуждать так: уравняем число разрядов, приписав ко второй дроби справа цифру 0; получим 2,5080. Десятичные дроби 2,5081 и 2,5080 различаются только цифрами в разряде десятитысячных: у первой дроби в этом разряде стоит цифра 1, а у второй — цифра 0. Поэтому первая дробь больше.

КАК МОЖНО СРАВНИТЬ ОБЫКНОВЕННУЮ ДРОБЬ И ДЕСЯТИЧНУЮ

Вы уже умеете сравнивать две обыкновенные и две десятичные дроби. А как сравнить, например, $\frac{5}{6}$ и 0,6? В этом случае нужно перейти к какой-нибудь одной форме представления дробей. Дробь $\frac{5}{6}$ в виде десятичной дроби записать нельзя, поэтому выразим в виде обыкновенной дроби число 0,6:

$$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Так как $\frac{5}{6} > \frac{3}{5}$, то $\frac{5}{6} > 0{,}6$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, почему верны равенства:
  а) $0{,}250 = 0{,}25$; б) $1{,}7 = 1{,}700$.
- Какая из дробей 5,031; 0,53; 5,1; 5,03 наибольшая? наименьшая? Перечислите дроби в порядке убывания.
- Сравните дроби:
  а) 0,2 и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$ и 0,3.

УПРАЖНЕНИЯ

РАВНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

142 Есть ли среди данных чисел равные? Если есть, укажите их:
а) 3,001; 3,010; 3,100; 3,1;
б) 6,800; 6,080; 6,880; 6,08;
в) 0,4; 0,40; 0,004; 0,400;
г) 1,05; 1,0505; 1,500; 1,5050.

143 Верно ли, что:
а) 12,40 = 12,4;
б) 25 = 25,0;
в) 1,03 = 1,30;
г) 1,500 = 1,50;
д) 160 = 16;
е) 2,01 = 2,0100000?

144 Замените данную десятичную дробь равной наиболее простого вида:
а) 3,6000;
б) 70,0200;
в) 0,8700;
г) 0,0030.

145 а) Выразите в метрах: 17 м 30 см; 70 м 50 см.
б) Выразите в килограммах: 3 кг 430 г; 5 кг 80 г.

146 К числу приписывают справа один нуль, два нуля, три нуля и т. д. Что происходит с этим числом, если оно является:
а) натуральным числом;
б) десятичной дробью?

СРАВНЕНИЕ И УПОРЯДОЧИВАНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

147 Сравните числа:
а) 0,6 и 0,4;
б) 0,2 и 0,1;
в) 0,30 и 0,3;
г) 2,55 и 2,65;
д) 1,21 и 1,28;
е) 4,75 и 4,05;
ж) 1,99 и 10,9;
з) 7,0191 и 7,1;
и) 2,44 и 2,404.

148 Сравните числа:
а) 50,001 и 50,01;
б) 17,183 и 17,09;
в) 29,5 и 29,53;
г) 7 и 6,99;
д) 0,89 и 1,5;
е) 0,00041 и 0,0005.

149 Какое из трёх данных чисел наибольшее и какое наименьшее:
а) 0,016; 0,044; 0,031;
б) 2,601; 2,610; 2,061;
в) 0,5; 0,6; 0,56;
г) 3,215; 32,15; 0,3215?

150 Расположите в порядке возрастания числа:
а) 7,34; 7,4; 7,3;
б) 10,2; 10,1; 10,16;
в) 2,356; 2,35; 2,36;
г) 0,007; 0,008; 0,0073.

151 Расположите в порядке убывания числа:
а) 22,86; 23,01; 22,68; 21,99;
б) 0,93; 0,853; 0,914; 0,94;
в) 0,09; 0,111; 0,1; 0,091;
г) 3,099; 3,909; 3,99; 3,9009.

152 Найдите закономерность, по которой строится последовательность чисел, и запишите следующие два числа; определите, как меняются члены последовательности — увеличиваются или уменьшаются:
а) 0,1; 0,02; 0,003; 0,0004; 0,00005; ... ;
б) 0,6; 0,56; 0,456; 0,3456; 0,23456; ... ;
в) 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; 0,11111; ... .

153 Найдите какую-нибудь десятичную дробь, заключённую между:
а) 2,7 и 2,8; б) 0,8 и 0,9.

154 Напишите три десятичные дроби, каждая из которых:
а) больше, чем 9,61, но меньше, чем 9,62; б) меньше, чем 0,0001.

155 Какие цифры можно подставить вместо звёздочки, чтобы полученное неравенство было верным:
а) $0,488 < 0,4*8$; в) $3,07 < 3,0*$;
б) $1*,93 < 11,93$; г) $6,*9 < 6,38$?

156 Дана десятичная дробь 6,73401152. Вычеркните одну цифру после запятой так, чтобы дробь: а) увеличилась; б) уменьшилась.
Для каждого случая укажите все решения.

СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ И ДЕСЯТИЧНОЙ

157 Сравните:
а) $\frac{1}{3}$ и 0,5; в) 0,75 и $\frac{4}{5}$; д) $\frac{4}{9}$ и 0,4;
б) $\frac{1}{7}$ и 0,4; г) 0,25 и $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{25}$ и 0,03.

158 Расположите числа в порядке возрастания:
а) $\frac{3}{4}$; $\frac{37}{500}$; 0,7; б) 0,13; $\frac{29}{200}$; 0,125.

159 Найдите какую-нибудь обыкновенную дробь, большую 0,1, но меньшую 0,2.

160 **ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ**

1) В десятичной дроби с «длинным хвостом» зачеркнули две последние цифры. Что произошло с этой десятичной дробью?

2) В десятичной дроби с «длинным хвостом» среди цифр после запятой есть один нуль (все остальные цифры не нули). Этот нуль вычеркнули. Сравните получившееся число с исходным, если этот нуль стоял: а) в конце десятичной дроби; б) не в конце десятичной дроби.

Указание. Прежде чем ответить на вопрос, поэкспериментируйте с числами.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

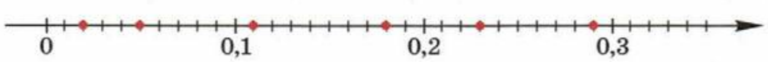
1 Запишите какую-нибудь десятичную дробь с четырьмя знаками после запятой и прочитайте её.

2 Запишите в виде суммы разрядных слагаемых:
а) натуральное число 3205; б) десятичную дробь 0,3205.

3 Запишите в виде десятичной дроби число:
а) $\frac{9}{10}$; б) $1\frac{3}{100}$; в) $\frac{549}{100}$.

4 1) Чему равен знаменатель обыкновенной дроби, если в её десятичной записи содержится 2 знака после запятой? 4 знака после запятой?
2) Представьте в виде обыкновенной дроби число:
а) 0,7; б) 0,091; в) 1,203.

5 Запишите числа, соответствующие точкам, отмеченным на координатной прямой.



6 Начертите координатную прямую, приняв за единичный отрезок 10 клеток. Отметьте на прямой число: а) 0,1; б) 0,5; в) 1,8; г) 2,2.

7 1) Ответьте на вопросы и проиллюстрируйте свои ответы примерами.
а) Какую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной?
б) В каком случае несократимую обыкновенную дробь нельзя представить в виде десятичной?
2) Запишите в виде десятичной дроби:
а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{7}{20}$; е) $\frac{4}{25}$.

8 Как записать десятичную дробь, равную данной десятичной дроби? Запишите три десятичные дроби, равные числу 5,070.

9 Сравните числа: а) 1,001 и 0,9999; б) 8,455 и 8,54; в) 0,305 и 0,3050.

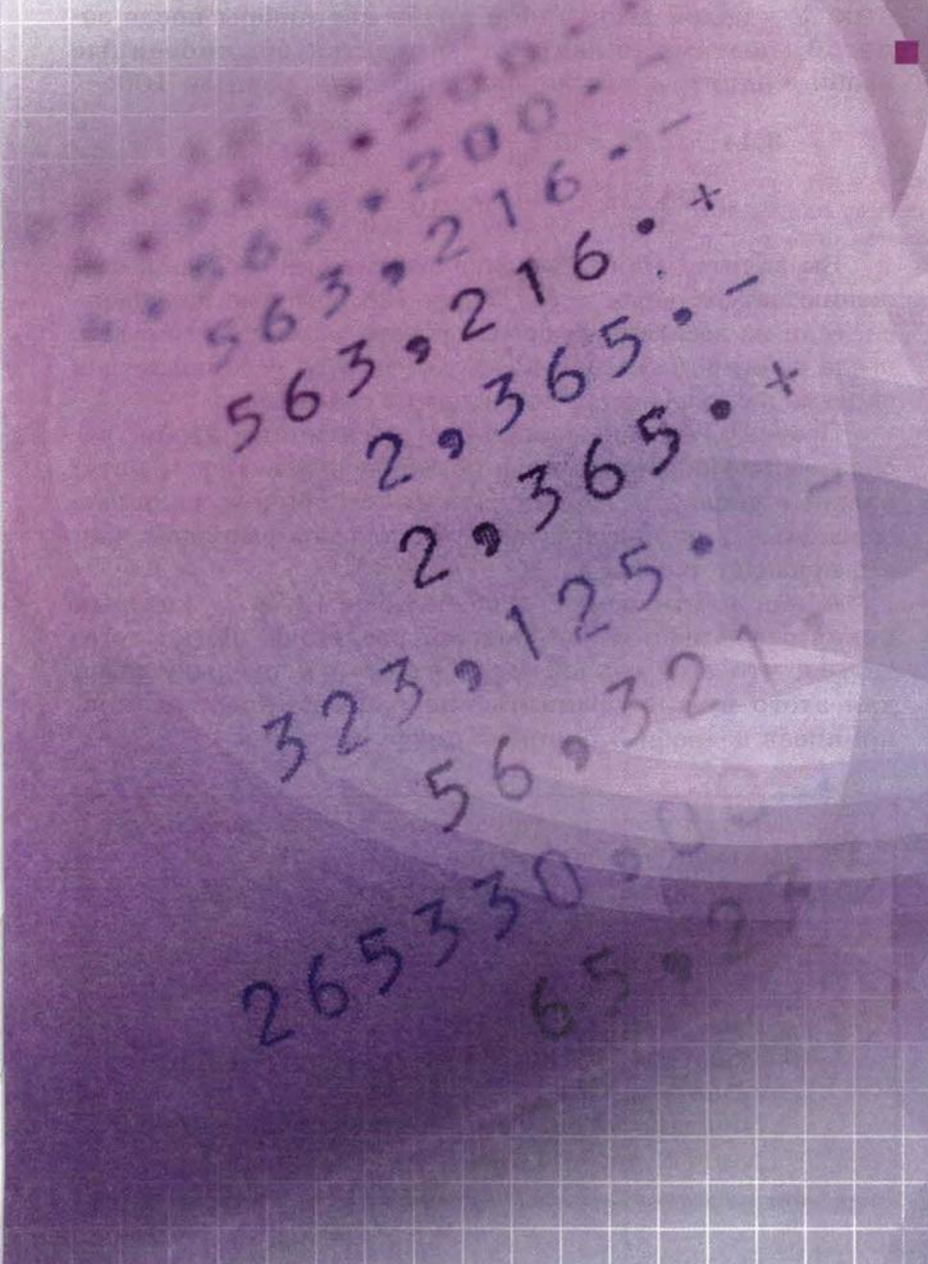
10 Между какими последовательными натуральными числами заключено число: а) 9,8; б) 15,03? Отвечая на вопрос, запишите соответствующее двойное неравенство и покажите примерное положение числа на координатной прямой.

11 а) Выразите в метрах: 3 см; 70 см; 3 м 48 см.
б) Выразите в тоннах: 20 кг; 200 кг; 1 т 500 кг.
в) Выразите в рублях: 2 к.; 90 к.; 10 р. 25 к.

глава 4

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

- СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ
- УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА 10, 100, 1000, ...
- УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ
- ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ
- ОКРУГЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ



ИНТЕРЕСНО

Учёные Древнего Вавилона, использовавшие шестидесятеричную систему счисления, распространили её и на дроби. Знаменателями таких дробей служат числа 60, 60^2, 60^3, ... Эти доли называли минутами, секундами, терциями, кварталами и т. д. Вавилонские учёные изобрели и упрощённый способ записи шестидесятеричных дробей – в строчку, без знаменателя. Например, запись 10°8′24″16‴ означает сумму $10 + \frac{8}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{16}{60^3}$. Позднее подобный подход был принят и для дробей со знаменателями 10, 10^2, 10^3, ... Самаркандский учёный Джемшид аль-Каши (XV в.), разработавший теорию десятичных дробей, назвал десятичные доли десятыми, десятичными секундами, десятичными терциями, десятичными кварталами и т. д.

12

ВЫ УЗНАЕТЕ

- По каким правилам складывают и вычитают десятичные дроби
- Как можно сложить десятичную дробь и обыкновенную

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Главное преимущество десятичной записи дробей заключается в том, что действия над десятичными дробями почти не отличаются от действий над натуральными числами — надо только научиться правильно ставить в результате запятую.

СЛОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ Чтобы понять, как складывают десятичные дроби, обратимся к примеру.

Найдём сумму десятичных дробей 3,44 и 7,28. Это можно сделать, представив дроби в виде обыкновенных. У каждой десятичной дроби две цифры после запятой, поэтому складывать придётся обыкновенные дроби с одним и тем же знаменателем, равным 100:

$$3{,}44 + 7{,}28 = 3\frac{44}{100} + 7\frac{28}{100} = \frac{344}{100} + \frac{728}{100} =$$

$$= \frac{344 + 728}{100} = \frac{1072}{100} = 10\frac{72}{100} = 10{,}72.$$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3{,}44 \\ 7{,}28 \end{array} \\ \hline 10{,}72 \end{array}$$

Вы видите, что вычисление фактически свелось к сложению натуральных чисел 344 и 728, которые получаются, если из десятичных дробей убрать запятые. А в сумме после запятой тоже оказалось две цифры — столько же, сколько их содержится в каждом из слагаемых.

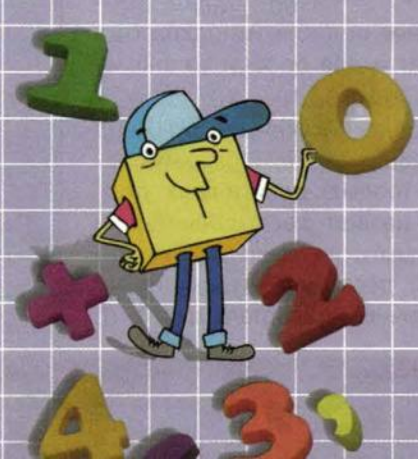
Поэтому, чтобы сложить эти десятичные дроби, необязательно обращать их в обыкновенные. Как и натуральные числа, их можно сложить столбиком, подписав слагаемые одно под другим — разряд под разрядом, как это показано рядом.

А как найти сумму дробей 3,5 и 12,74, у которых количество цифр после запятой различно? Легко догадаться, что этот случай можно свести к предыдущему: для этого нужно уравнять число десятичных знаков, приписав к дроби 3,5 справа цифру 0.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 3{,}50 \\ 12{,}74 \end{array} \\ \hline 16{,}24 \end{array}$$

! При сложении десятичных дробей руководствуются следующим правилом:

- записать дроби в столбик — разряд под разрядом, запятую под запятой;
- если количество десятичных знаков у дробей различно, уравнять их число, приписав справа нули;
- выполнить сложение, не обращая внимания на запятые;
- поставить в сумме запятую под запятой в данных дробях.

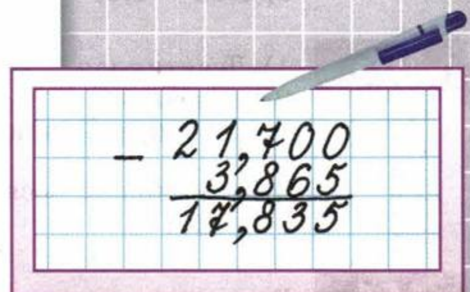


Для сложения десятичных дробей справедливы переместительное и сочетательное свойства. В самом деле, десятичные дроби — это другая форма записи соответствующих обыкновенных дробей, а для обыкновенных дробей эти свойства выполняются.

Свойства сложения позволяют упрощать вычисления. Например:

$$7{,}36 + 0{,}8 + 2{,}64 =$$
$$= (7{,}36 + 2{,}64) + 0{,}8 = 10 + 0{,}8 = 10{,}8.$$

ВЫЧИТАНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ Вычитать десятичные дроби также можно в столбик.



! Чтобы найти разность десятичных дробей, нужно:

- записать дроби в столбик — разряд под разрядом, запятую под запятой;
- если количество десятичных знаков у дробей различно, уравнять их число, приписав справа нули;
- выполнить вычитание, не обращая внимания на запятые;
- поставить в разности запятую под запятой в данных дробях.

Пример. Найдём значение выражения
$$(3{,}97 + 10{,}034) - 8{,}234:$$

1) $\begin{array}{r} + \; 3{,}970 \\ 10{,}034 \\ \hline 14{,}004 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} - \; 14{,}004 \\ 8{,}234 \\ \hline 5{,}770 \end{array} = 5{,}77$

СЛОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ И ДЕСЯТИЧНОЙ Чтобы сложить обыкновенную дробь и десятичную, их нужно привести к одному и тому же виду — представить обыкновенную дробь в виде десятичной или десятичную в виде обыкновенной.

Например, сумму $\frac{1}{20} + 1{,}37$ можно вычислить так:

$\frac{1}{20} + 1{,}37 = 0{,}05 + 1{,}37 = 1{,}42$. Или так:

$$\frac{1}{20} + 1{,}37 = \frac{1}{20} + 1\frac{37}{100} = 1\frac{5+37}{100} = 1\frac{42}{100} = 1{,}42.$$

А вот сумму дробей $\frac{1}{6}$ и 0,6 можно вычислить только одним способом, так как дробь $\frac{1}{6}$ в десятичную не обращается:

$$\frac{1}{6} + 0{,}6 = \frac{1}{6} + \frac{3}{5} = \frac{5+18}{30} = \frac{23}{30}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- На примере вычисления суммы и разности чисел 5,63 и 4,972 объясните, как складывают и как вычитают десятичные дроби.
- Выполните действие:
  а) $\frac{1}{4} + 0{,}19$; б) $3{,}2 - \frac{1}{7}$.

УПРАЖНЕНИЯ

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

161 Найдите сумму:
а) 2,57 + 4,62; в) 0,315 + 0,026; д) 2,56 + 2,73 + 3,08;
б) 0,513 + 0,477; г) 3,72 + 15,43; е) 0,24 + 0,96 + 1,44.

162 Вычислите:
а) 12,9 + 6,31; в) 104,2 + 6,77; д) 123,6 + 1,234 + 54;
б) 0,82 + 1,5; г) 7,356 + 22,54; е) 10,84 + 5,5 + 35.

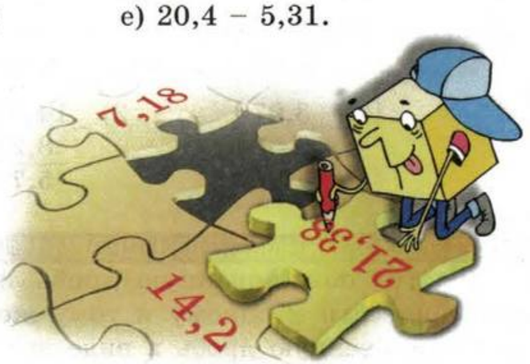
163 1) Десятичная дробь представлена в виде суммы разрядных слагаемых. Запишите её:
а) 0,3 + 0,02 + 0,001; б) 4 + 0,5 + 0,007; в) 1 + 0,1 + 0,02.

2) Представьте десятичную дробь в виде суммы разрядных слагаемых:
а) 0,149; б) 2,36; в) 15,03.

164 Выполните вычитание:
а) 0,438 − 0,212; в) 0,461 − 0,181; д) 0,202 − 0,111;
б) 2,85 − 0,23; г) 6,22 − 3,32; е) 5,71 − 2,63.

165 Вычислите:
а) 96,637 − 7,63; в) 13,6 − 13,46; д) 7,08 − 4,125;
б) 8,405 − 0,23; г) 18,8 − 13,51; е) 20,4 − 5,31.

166 Найдите разность:
а) 126 − 38,7; в) 51 − 23,04;
б) 82 − 20,16; г) 112 − 72,92.



167 Выполните действия:
а) 102,093 − (47,123 + 5,68 + 31,7);
б) 55,28 + 76,438 − (8,6 + 0,738);
в) 100,6 − (47,84 + 26,38) − 9,208.

168 Найдите неизвестное число, обозначенное буквой:
а) $a + 2,37 = 9,24$; б) $10,3 - b = 6,6$; в) $a - 7,18 = 14,2$.

169 а) Составьте из чисел 4,84; 5,055; 10,5 все возможные суммы и найдите их значения.
б) Составьте из чисел 6,37; 2,13; 4,85 все возможные разности и вычислите их значения.

170 Не выполняя вычислений, сравните с единицей сумму:
а) 0,499 + 0,4821; б) 0,673 + 0,587; в) 0,78 + 0,509.
Образец. 0,384 + 0,415 < 0,5 + 0,5 = 1.

ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

171 Вычислите, обратив десятичную дробь в обыкновенную:

а) $0,5 + \frac{1}{3}$; б) $0,2 - \frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{12} + 0,25$; г) $\frac{5}{6} - 0,5$; д) $0,8 - \frac{2}{3}$.

172 Вычислите, обратив обыкновенную дробь в десятичную:

а) $2,82 + \frac{2}{5}$; в) $2,71 - \frac{3}{5}$; д) $\frac{1}{25} + 1,27$;

б) $1\frac{1}{2} - 1,33$; г) $1,78 - \frac{3}{4}$; е) $\frac{3}{20} + 3,34$.

173 Вычислите:

а) $0,75 + \frac{1}{28} + \frac{5}{7}$; б) $0,256 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}$; в) $\frac{7}{15} + \frac{1}{3} - 0,2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

174 а) В одной банке 5,2 кг краски, в другой — на 1,6 кг больше. Сколько килограммов краски в двух банках?
б) Щенок весит 2,3 кг, а котёнок — на 1,8 кг меньше. Сколько весят они вместе?

175 а) В кувшине 1,25 л молока, это на 2,7 л меньше, чем в бидоне, и на 1,5 л меньше, чем в ведре. Сколько всего литров молока в этих трёх ёмкостях?
б) Сторона треугольника, равная 11,5 см, на 0,6 см меньше второй его стороны и на 0,9 см больше третьей. Чему равен периметр треугольника?

176 а) Туристы должны были пройти 15 км между сёлами. В первый час они прошли 5,2 км, во второй час — на 0,5 км меньше, а в третий час — на 0,9 меньше, чем во второй. Сколько километров им осталось пройти?
б) Ученик планирует затратить на домашние задания по математике, истории и географии 2,5 ч. Задания по математике он выполнил за 0,8 ч, по истории — на 0,25 ч быстрее, а задания по географии он выполнял на 0,15 ч дольше, чем по математике. Уложился ли он в запланированное время?

177 а) Длина первой грядки на 0,9 м больше длины третьей грядки, а длина второй грядки на 0,55 м больше длины третьей грядки. На сколько метров первая грядка длиннее второй?
б) Первое поле на 3,2 га меньше второго, а третье поле на 4,8 га больше второго. На сколько гектаров третье поле больше первого?

178 Скорость течения реки равна 3,2 км/ч. Найдите:
а) скорость лодки по течению и скорость лодки против течения, если её собственная скорость равна 12,5 км/ч;
б) собственную скорость лодки и скорость лодки по течению, если её скорость против течения равна 7,2 км/ч.

179 Попугай, канарейка и щегол вместе склевали 45,6 г зерна. Попугай и канарейка склевали 29,9 г, а канарейка и щегол — 25,1 г. Сколько зерна склевала каждая птица?

13 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА 10, 100, 1000, ...

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... сводится к переносу запятой

$6,735 \cdot 10 = 67,35$

Умножение и деление натурального числа на 10, 100, 1000 и т. д. сводится к приписыванию или отбрасыванию соответствующего количества нулей. Например:

$$23 \cdot 1000 = 23\,000; \quad 48\,650 : 10 = 4865.$$

А умножение и деление десятичной дроби на единицу с нулями сводится к переносу запятой.

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА 10, 100, 1000 и т. д.

Будем умножать десятичную дробь 6,735 на 10, 100, 1000 и т. д. При этом действия будем выполнять в обыкновенных дробях:

$$6,735 \cdot 10 = \frac{6735}{1000} \cdot \frac{10}{1} = \frac{6735}{100} = 67\frac{35}{100} = 67,35;$$

$$6,735 \cdot 100 = \frac{6735}{1000} \cdot \frac{100}{1} = \frac{6735}{10} = 673\frac{5}{10} = 673,5;$$

$$6,735 \cdot 1000 = \frac{6735}{1000} \cdot \frac{1000}{1} = 6735.$$

Вы видите, что в результате умножения в исходной дроби *меняется положение запятой*: при умножении на 10 она передвигается вправо на 1 знак, при умножении на 100 — на 2 знака, при умножении на 1000 — на 3 знака. Эти примеры подсказывают следующее правило:

> **!** **Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., нужно перенести в этой дроби запятую на столько знаков вправо, сколько нулей содержится в множителе.**

Обратите внимание: при умножении 6,735 на 1000 мы получили число без запятой, так как в дроби 6,735 содержится ровно 3 десятичных знака. А как, пользуясь сформулированным правилом, умножить эту дробь на следующие степени числа 10, т. е. на 10 000, 100 000 и т. д.?

Вспомните: к десятичной дроби можно приписывать справа любое число нулей, при этом получается дробь, равная данной. Поэтому мы имеем возможность переносить запятую на столько знаков, сколько требуется. Таким образом, в соответствии с правилом получим:

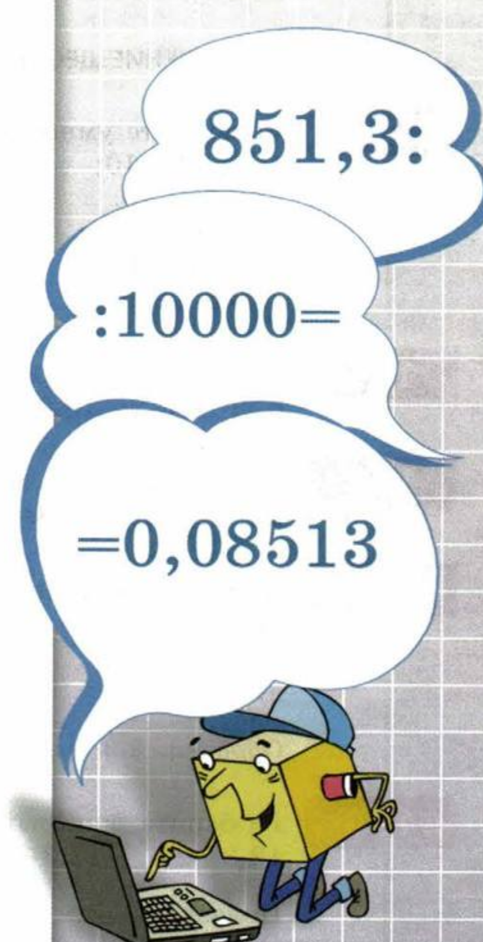
$$6,735 \cdot 10\,000 = 6,7350 \cdot 10\,000 = 67\,350;$$
$$6,735 \cdot 100\,000 = 6,73500 \cdot 100\,000 = 673\,500;$$
$$6,735 \cdot 1\,000\,000 = 6,735000 \cdot 1\,000\,000 = 6\,735\,000.$$

ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА СТЕПЕНЬ 10 Деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. также *сводится к переносу запятой*, но только влево. Возьмём, например, число 851,3:

$$851{,}3 : 10 = \frac{8513}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{8513}{100} = 85\frac{13}{100} = 85{,}13;$$

$$851{,}3 : 100 = \frac{8513}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{8513}{1000} = 8\frac{513}{1000} = 8{,}513.$$

Чтобы разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., нужно перенести в этой дроби запятую на столько знаков влево, сколько нулей содержится в делителе.



Попробуем теперь разделить ту же дробь 851,3 на 10 000. По правилу нужно было бы перенести запятую влево на 4 знака, но у дроби 851,3 перед запятой только 3 знака! Чтобы понять, как воспользоваться правилом и в таком «неприятном» случае, найдём частное, перейдя к обыкновенным дробям:

$$851{,}3 : 10\,000 = \frac{8513}{10} \cdot \frac{1}{10\,000} = \frac{8513}{100\,000} = 0{,}08513.$$

Получившийся ответ подсказывает нам приём, который позволяет находить результат деления на 10, 100, 1000 и т. д. с помощью переноса запятой в любом случае: при необходимости к десятичной дроби слева нужно приписать вспомогательные нули. Например:

$$851{,}3 : 10\,000 = 00851{,}3 : 10\,000 = 0{,}08513;$$
$$851{,}3 : 100\,000 = 000851{,}3 : 100\,000 = 0{,}008513.$$

ПЕРЕХОД ОТ ОДНИХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ К ДРУГИМ Так как в метрической системе мер единицы различаются в 10, 100, 1000 и т. д. раз, то переход от одних единиц измерения к другим выполняется с помощью умножения и деления на степень 10.

Пример 1. Выразим 2,7 кг в граммах.

Так как 1 кг = 1000 г, то, чтобы перейти от килограммов к граммам, т. е. к *более мелким* единицам, нужно 2,7 умножить на 1000:

$$2{,}7 \text{ кг} = (2{,}7 \cdot 1000) \text{ г} = 2700 \text{ г}.$$

Пример 2. Выразим 175 см в метрах.

Так как 1 м = 100 см, то, чтобы перейти от сантиметров к метрам, т. е. к *более крупным* единицам, нужно 175 разделить на 100:

$$175 \text{ см} = (175 : 100) \text{ м} = 1{,}75 \text{ м}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- По какому правилу умножают десятичную дробь на единицу с нулями? Вычислите:
  а) 4,321 · 100;
  б) 7,3 · 1000;
  в) 0,075 · 100.
- По какому правилу делят десятичную дробь на единицу с нулями? Вычислите:
  а) 850,4 : 100;
  б) 3,65 : 1000;
  в) 0,42 : 10.
- Выразите в килограммах:
  а) 7,5 т;
  б) 370 г.

УПРАЖНЕНИЯ

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ЕДИНИЦУ С НУЛЯМИ

180 Выполните умножение:

1) 15,47 · 10; 0,75 · 10; 13,003 · 10; 0,01 · 10; 9,8 · 10;
2) 913,134 · 100; 10,28 · 100; 0,0045 · 100; 0,36 · 100; 4,5 · 100;
3) 4,8071 · 1000; 3,7 · 1000; 16,14 · 1000; 0,0018 · 1000; 0,001 · 1000.

181 Увеличьте в 10 раз, в 100 раз, в 1000 раз каждое из чисел:
0,2; 1,112; 13,0247; 34,5.

182 Земля, вращаясь вокруг Солнца, движется со скоростью 29,8 км/с. Какой путь проделает Земля за 10 с?

183 Представьте в виде натурального числа:

а) 1,5 тыс.; б) 40,7 тыс.; в) 0,6 тыс.;
г) 2,5 млн; д) 10,2 млн; е) 0,9 млн;
ж) 7,5 млрд; з) 12,55 млрд; и) 0,785 млрд.

Образец. 2,3 тыс. = 2,3 · 1000 = 2300.

184 Разберите, как выполнено умножение:
12,3 · 20 = (12,3 · 10) · 2 = 123 · 2 = 246.

Пользуясь этим приёмом, вычислите:
а) 1,8 · 90; б) 41,1 · 20; в) 3,05 · 300; г) 1,25 · 800.

ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ЕДИНИЦУ С НУЛЯМИ

185 Выполните деление:

1) 27,13 : 10; 104,85 : 10; 9,28 : 10; 1,5 : 10; 0,36 : 10; 0,042 : 10;
2) 210,36 : 100; 38,5 : 100; 4,7 : 100; 0,25 : 100; 0,08 : 100; 0,006 : 100;
3) 2345,56 : 1000; 562,7 : 1000; 36,128 : 1000; 4,931 : 1000; 0,137 : 1000; 0,0012 : 1000.

186 Уменьшите в 10 раз, в 100 раз, в 1000 раз каждое из чисел:
2500; 1555,01; 4,45; 0,6.

187 а) На ферму завезли 85 кг сахара. Десятая часть его пошла на приготовление варенья из яблок. Сколько сахара потратили на это варенье?
б) Длина провода 63 м. Провод разрезали на две части так, что одна часть оказалась в 9 раз больше другой. Найдите длину меньшей части провода.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ЕДИНИЦУ С НУЛЯМИ

188 Выполните действие:

а) $24{,}85 \cdot 100$; б) $13{,}76 : 10$; в) $0{,}346 \cdot 10$; г) $124{,}34 : 1000$; д) $0{,}48 \cdot 10$; е) $4{,}75 \cdot 1000$; ж) $3{,}8 : 100$; з) $0{,}5 \cdot 100$; и) $0{,}67 \cdot 10$; к) $1{,}8 : 1000$; л) $25{,}76 \cdot 10\,000$; м) $100{,}72 : 100$.

189 На какое число нужно умножить или разделить число 25,6, чтобы в результате получилось:

а) 256; б) 25 600; в) 2,56; г) 0,0256?

190 а) За 20 компьютеров заплатили 484,5 тыс. р. Сколько надо заплатить за 200 таких же компьютеров?

б) За 100 стиральных машин заплатили 1,26 млн р. Сколько надо заплатить за 10 таких же стиральных машин?

191 Продолжите последовательность, записав ещё три числа. Какое действие вы при этом будете выполнять?

а) 110; 11; 1,1; ...;

б) 0,000001234; 0,0001234; 0,01234; ... .

192 Как изменится положение запятой в десятичной дроби, если:

а) эту дробь уменьшить в 100 раз и ещё в 10 раз;

б) эту дробь уменьшить в 10 раз, а затем увеличить в 1000 раз?

193 Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:

а) $563{,}2 \cdot 70{,}4$ и $56{,}32 \cdot 704$; б) $563{,}2 \cdot 70{,}4$ и $5{,}632 \cdot 704$; в) $563{,}2 : 70{,}4$ и $56{,}32 : 7{,}04$; г) $0{,}5632 : 0{,}704$ и $563{,}2 : 70{,}4$.

ПЕРЕХОД ОТ ОДНИХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ К ДРУГИМ

194 Выразите:

а) в граммах: 1,4 кг; 0,125 кг; 0,4 кг; 2,05 кг;

б) в килограммах: 3,7 ц; 0,5 ц; 6,8 т; 0,75 т.

195 Выразите:

а) в килограммах: 1270 г; 350 г; 2075 г;

б) в центнерах: 240 кг; 90 кг; 1425 кг.

196 Выразите:

а) в метрах: 23 км; 5,127 км; 0,027 км; 0,35 км; 0,4 км;

б) в миллиметрах: 16 см; 10,5 см; 0,3 см; 1,7 см; 0,4 см.

197 Выразите:

а) в метрах: 526 см; 48 см; 20 см; 7,6 см; 5 см;

б) в граммах: 3000 мг; 25,6 мг; 15 мг; 4 мг.

14 УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как умножают десятичную дробь на десятичную, на натуральное число, на обыкновенную дробь

Умножение десятичных дробей, как и сложение, сводится к действию над натуральными числами. Но место запятой при умножении определяется иначе, чем при сложении.

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ДЕСЯТИЧНУЮ Найдём произведение десятичных дробей 3,76 и 2,4, заменив их обыкновенными дробями:

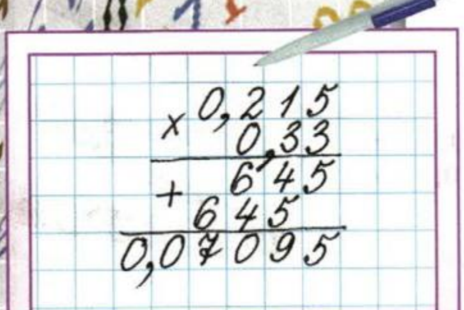
$$3{,}76 \cdot 2{,}4 = 3\frac{76}{100} \cdot 2\frac{4}{10} = \frac{376 \cdot 24}{1000} = \frac{9024}{1000} = 9{,}024.$$

Фактически нам пришлось перемножать натуральные числа 376 и 24, которые получаются, если из данных десятичных дробей убрать запятые. В первом множителе две цифры после запятой, во втором — одна, поэтому в знаменателе дроби $\frac{9024}{1000}$ получилось число с тремя нулями, а в соответствующей десятичной дроби оказалось три цифры после запятой. Таким образом, десятичных знаков в произведении столько же, сколько их в множителях вместе.

Рассмотренный пример подсказывает нам правило умножения десятичных дробей.

> **!** **Чтобы найти произведение двух десятичных дробей, можно:**
> - **мысленно убрать из множителей запятые и перемножить получившиеся натуральные числа;**
> - **в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько десятичных знаков содержится в обоих множителях вместе.**

При умножении десятичных дробей в столбик их записывают одну под другой как натуральные числа, не обращая внимания на запятые.



Пример 1. Найдём произведение чисел 0,215 и 0,33.

Рассмотрите, как выполнено умножение этих дробей на полях. Перемножив числа 215 и 33, которые получаются, если не обращать внимания на запятые, мы получили в произведении число 7095. Затем в этом произведении мы отделили запятой справа пять цифр (для этого нам пришлось слева приписать нули).

Таким образом, $0{,}215 \cdot 0{,}33 = 0{,}07095$.

Заметим, что для умножения десятичных дробей справедливы переместительное и сочетательное свойства, а также распределительное свойство умножения относительно сложения. Эти свойства часто позволяют упрощать вычисления. Например:

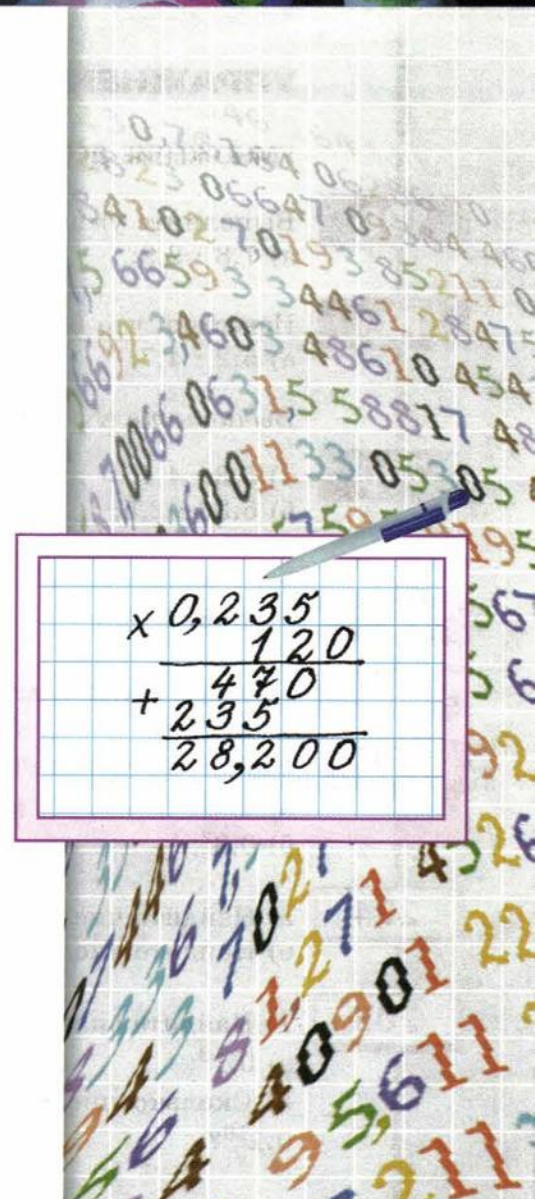
$$(0{,}2 \cdot 1{,}4) \cdot 0{,}5 = 1{,}4 \cdot (0{,}2 \cdot 0{,}5) = 1{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}14.$$

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО Правило умножения десятичных дробей применимо и в том случае, когда один из множителей — натуральное число. При этом в произведении нужно отделять запятой столько десятичных знаков, сколько их содержится в множителе, являющемся десятичной дробью.

Пример 2. Вычислим произведение $0{,}235 \cdot 120$.

Умножив число 235 на 120, мы получили в произведении 28 200. Отделив запятой справа три цифры, получили десятичную дробь 28,200, т. е. 28,2.

Таким образом, $0{,}235 \cdot 120 = 28{,}2$.



УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ОБЫКНОВЕННУЮ Чтобы перемножить десятичную дробь и обыкновенную, нужно прежде всего привести их к одному виду. Тогда можно воспользоваться либо правилом умножения обыкновенных дробей, либо правилом умножения десятичных дробей.

Пример 3. Найдём произведение $\frac{5}{6} \cdot 0{,}27$.

Дробь $\frac{5}{6}$ нельзя обратить в десятичную, поэтому запишем в виде обыкновенной дроби число 0,27:

$$\frac{5}{6} \cdot 0{,}27 = \frac{5}{6} \cdot \frac{27}{100} = \frac{5 \cdot 27}{6 \cdot 100} = \frac{9}{40}.$$

Пример 4. Найдём произведение $1{,}75 \cdot \frac{2}{5}$.

Дробь $\frac{2}{5}$ можно представить в виде десятичной: $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Поэтому выполним умножение в десятичных дробях. Получим $1{,}75 \cdot 0{,}4 = 0{,}7$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ **Задача.** Конфеты расфасовали в пакеты по 0,3 кг в каждый: шоколадные — в 25 пакетов, ириски — в 30 пакетов, карамель — в 18 пакетов. Сколько килограммов конфет расфасовано?

1) По условию задачи составим выражение:
$0{,}3 \cdot 25 + 0{,}3 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 18$.

2) Вычислим значение этого выражения:
$0{,}3 \cdot (25 + 30 + 18) = 0{,}3 \cdot 73 = 21{,}9$.

Ответ: 21,9 кг.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- На примере вычисления произведения $7{,}85 \cdot 3{,}9$ расскажите, как находится произведение двух десятичных дробей.
- Как определяют положение запятой в произведении десятичной дроби и натурального числа? Приведите пример.
- Вычислите произведение $0{,}72 \cdot \frac{5}{9}$.

УПРАЖНЕНИЯ

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

198 Выполните умножение:
а) $7{,}8 \cdot 2{,}9$; б) $4{,}4 \cdot 2{,}2$; в) $1{,}6 \cdot 2{,}5$; г) $0{,}8 \cdot 7{,}5$.

199 Известно, что $52 \cdot 47 = 2444$. Используя этот результат, найдите:
а) $5{,}2 \cdot 4{,}7$; б) $0{,}52 \cdot 4{,}7$; в) $52 \cdot 47$; г) $0{,}52 \cdot 0{,}47$.

Вычислите (№ 200, 201).

200 а) $5{,}3 \cdot 4{,}1$; г) $1{,}56 \cdot 0{,}2$; ж) $10{,}3 \cdot 1{,}01$;
б) $6{,}36 \cdot 2{,}5$; д) $2{,}6 \cdot 3{,}05$; з) $5{,}08 \cdot 2{,}05$;
в) $27{,}2 \cdot 0{,}06$; е) $1{,}04 \cdot 8{,}2$; и) $2{,}35 \cdot 0{,}14$.

201 а) $0{,}082 \cdot 0{,}5$; б) $0{,}003 \cdot 0{,}07$; в) $1{,}23 \cdot 0{,}02$.

202 Площадь какой комнаты больше — размером $5{,}1 \times 3{,}4$ м или $4{,}8 \times 3{,}7$ м?

203 Найдите значение степени:
а) $0{,}6^2$; в) $1{,}1^2$; д) $0{,}2^3$; ж) $0{,}01^3$;
б) $0{,}3^2$; г) $0{,}5^2$; е) $1{,}1^3$; з) $0{,}5^3$.

204 а) Найдите число, квадрат которого равен 0,64; 0,01; 0,0009.
б) Найдите число, куб которого равен 0,064; 0,008; 0,125.

205 1) Найдите значение степени:
а) $0{,}1^2$; б) $0{,}1^3$; в) $0{,}1^4$; г) $0{,}1^5$.
2) Сколько цифр после запятой содержит десятичная дробь, равная $0{,}1^6$? $0{,}1^{10}$?

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

206 Найдите произведение чисел:
а) 3,55 и 6; г) 6,71 и 23; ж) 0,25 и 4;
б) 4,77 и 3; д) 3,02 и 15; з) 0,2 и 5;
в) 0,235 и 4; е) 0,75 и 44; и) 0,125 и 8.

207 Один метр ткани стоит 450 р. Сколько стоят 5 м, 2,5 м, 3,8 м, 0,6 м этой ткани?

208 Цена килограмма яблок 53 р. Сколько стоят 2 кг, 1,2 кг, 3,7 кг, 0,5 кг, 800 г, 2 кг 320 г яблок?

209 Коробка размерами 2,3 дм, 2,3 дм и 4 дм полностью наполнена крупой. Поместится ли вся эта крупа в коробке размерами 4 дм, 4 дм и 1,4 дм?

210 Скорость звука в воздухе 0,33 км/с. На каком расстоянии от вас происходит гроза, если вы увидели вспышку молнии, а раскат грома услышали через 5 с? через 10 с? через 24 с?

211 Велосипедист едет со скоростью 12,5 км/ч. Какой путь он проедет, двигаясь с той же скоростью, за 2 ч? за 0,5 ч? за 1,5 ч? за 2,5 ч?

212 Вычислите устно:
а) $0{,}3 \cdot 6$; г) $0{,}75 \cdot 10$; ж) $0{,}4 \cdot 0{,}1$; к) $0{,}2 \cdot 5$;
б) $8 \cdot 0{,}5$; д) $2{,}5 \cdot 2$; з) $0{,}03 \cdot 10$; л) $1{,}3 \cdot 3$;
в) $0{,}1 \cdot 7$; е) $4 \cdot 1{,}2$; и) $4 \cdot 2{,}5$; м) $18 \cdot 0{,}1$.

213 Вычислите наиболее удобным способом:
а) $2 \cdot 3{,}8 \cdot 5$; в) $6{,}54 \cdot 0{,}25 \cdot 4$; д) $0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 4 \cdot 5$;
б) $2{,}5 \cdot 0{,}061 \cdot 4$; г) $13{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 5$; е) $1{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 2$.

РАЗНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

214 Найдите значение выражения:
а) $0{,}4 \cdot 2{,}55 \cdot 1{,}6$; г) $(8{,}4 + 1{,}92) \cdot (1{,}7 - 1{,}5)$;
б) $40 \cdot (7{,}85 - 3{,}9)$; д) $17{,}5 - 3 \cdot 4{,}5 - 1{,}725$;
в) $17 - 3{,}44 \cdot 3{,}5$; е) $20{,}3 - 5 \cdot (2{,}4 + 0{,}43)$.

215 Вычислите:
а) $2{,}1^2 - 2{,}1$; в) $2 \cdot 0{,}8^2$; д) $2{,}5^2 - 0{,}5^2$;
б) $0{,}9 - 0{,}9^2$; г) $(2 \cdot 0{,}8)^2$; е) $(2{,}5 - 0{,}5)^2$.

УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ОБЫКНОВЕННУЮ

216 Выполните умножение и, если возможно, представьте ответ в виде десятичной дроби:
а) $\frac{2}{3} \cdot 0{,}15$; в) $\frac{1}{3} \cdot 0{,}1$; д) $1{,}5 \cdot \frac{5}{9}$; ж) $0{,}024 \cdot \frac{1}{2}$;
б) $0{,}12 \cdot \frac{1}{6}$; г) $2{,}1 \cdot \frac{3}{7}$; е) $3\frac{3}{4} \cdot 0{,}4$; з) $\frac{1}{5} \cdot 4{,}85$.

217 Выполните умножение, следуя приведённому образцу:
а) $116 \cdot 0{,}5$; в) $64 \cdot 0{,}25$; д) $158 \cdot 0{,}5$;
б) $84 \cdot 0{,}25$; г) $284 \cdot 0{,}5$; е) $1008 \cdot 0{,}25$.

Образец. $48 \cdot 0{,}5 = 48 \cdot \frac{1}{2} = 48 : 2 = 24$; $48 \cdot 0{,}25 = 48 \cdot \frac{1}{4} = 48 : 4 = 12$.

Неверно! Коля и Петя выполняли задания на умножение десятичных дробей.
Коля записал: $32{,}7 \cdot 0{,}3 = 9{,}81$. Петя записал: $3{,}27 \cdot 0{,}3 = 9{,}81$.
Один из них ошибся. Кто это?

15 ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что отличает деление от других действий с десятичными дробями
- Новый способ перевода обыкновенной дроби в десятичную

Результатом сложения, вычитания и умножения двух десятичных дробей всегда является десятичная дробь. Эти действия с десятичными дробями мы можем выполнять практически так же, как с натуральными числами.

Иначе обстоит дело с делением. Возьмём, например, частные 0,28 : 1,4 и 1,2 : 0,9 и вычислим каждое из них, перейдя к обыкновенным дробям:

$$0{,}28 : 1{,}4 = \frac{28}{100} : \frac{14}{10} = \frac{28 \cdot 10}{100 \cdot 14} = \frac{1}{5};$$

$$1{,}2 : 0{,}9 = \frac{12}{10} : \frac{9}{10} = \frac{12 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{4}{3}.$$

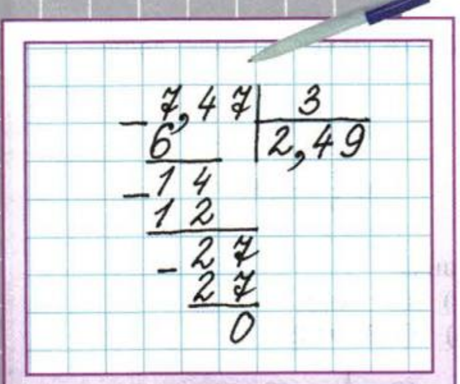
В первом случае мы получили дробь $\frac{1}{5}$, которую можно представить в виде десятичной дроби: $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

А дробь $\frac{4}{3}$, полученная во втором случае, в десятичную не обращается. Таким образом, частное двух десятичных дробей не всегда можно выразить десятичной дробью.

СЛУЧАЙ, КОГДА ЧАСТНОЕ ВЫРАЖАЕТСЯ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБЬЮ

Если частное десятичных дробей выражается десятичной дробью, то деление можно выполнить уголком, практически по тем же правилам, что и деление натуральных чисел. Иногда это оказывается удобным.

Сначала рассмотрим *деление десятичной дроби на натуральное число*. Этот случай можно считать главным, так как деление на десятичную дробь, как вы потом увидите, всегда можно свести к делению на натуральное число.



Пример 1. Найдём частное 7,47 : 3.

Разберите, как выполнено деление. Сначала разделили на 3 целую часть дроби 7,47 и поставили в частном запятую. После этого продолжали деление до тех пор, пока не получили в остатке нуль. Этот нуль означает, что деление закончено.

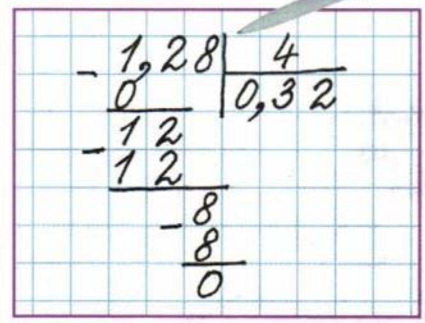
Таким образом, 7,47 : 3 = 2,49.

! **Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как и деление натуральных чисел. Сразу после того как закончено деление целой части, в частном ставят запятую.**

Пример 2. Найдём частное 1,28 : 4.

Этот пример отличается от предыдущего тем, что целая часть делимого меньше делителя. В таких случаях в частном пишут 0, после чего ставят запятую и продолжают деление. Выполнив деление, получим

$$1{,}28 : 4 = 0{,}32.$$

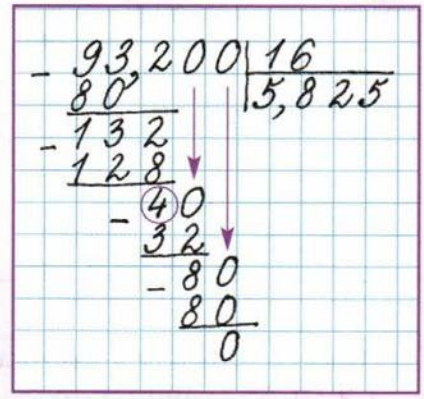


Пример 3. Найдём частное 93,2 : 16.

Посмотрите, как выполнено деление. Новым в этом примере оказалось то, что, когда все цифры делимого были снесены, нуль в остатке не получился. Однако мы знаем, что десятичная дробь не изменится, если справа к ней приписать нули. Поэтому, чтобы продолжить деление, мы последовательно приписывали к делимому нули и вычисляли следующие цифры частного. Получили

$$93{,}2 : 16 = 5{,}825.$$

Заметим, что в подобных случаях нуль можно приписывать не к делимому, а непосредственно к остатку.



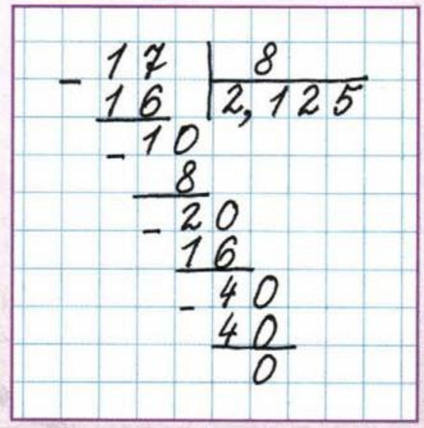
Пример 4. Рассмотрим частное натуральных чисел 17 и 8.

Выполнив деление уголком, получим, что 17 : 8 = = 2,125. Но это частное, как известно, можно записать и в виде обыкновенной дроби:

$$17 : 8 = \frac{17}{8}.$$

Так как $17 : 8 = \frac{17}{8}$ и $17 : 8 = 2{,}125$, то $\frac{17}{8} = 2{,}125$.

Вы видите, что мы смогли представить обыкновенную дробь $\frac{17}{8}$ в виде десятичной новым способом, не домножая знаменатель на $5 \cdot 5 \cdot 5$.



> **Если обыкновенная дробь представляется в виде десятичной, то получить её десятичную запись можно с помощью деления уголком.**

Рассмотрим теперь *деление на десятичную дробь*. Этот случай легко свести к делению на натуральное число, выполнять которое мы уже умеем.

Возьмём, например, частное 0,126 : 0,45. Его значение не изменится, если делимое и делитель умножить на 100:

$$0{,}126 : 0{,}45 = 12{,}6 : 45.$$

Таким образом, вместо деления на десятичную дробь 0,45 можно выполнить деление на число 45.

Так как 12,6 : 45 = 0,28, то 0,126 : 0,45 = 0,28.

Обратите внимание: чтобы из частного 0,126 : 0,45 получить частное 12,6 : 45, достаточно в делимом и делителе перенести запятую на два знака вправо. Это и понятно: ведь умножение десятичной дроби на единицу с несколькими нулями равнозначно переносу запятой на столько же цифр вправо.

При делении числа на десятичную дробь можно действовать в соответствии со следующим правилом:

> **!** **Чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно:**
> - **перенести в делимом и делителе запятую вправо на столько цифр, сколько их содержится после запятой в делителе;**
> - **выполнить деление на натуральное число.**

Разберите, как это правило применяется в следующих примерах:

Пример 5. Найдём частное 4,9 : 1,75:
4,9 : 1,75 = 490 : 175;

```
_ 490  | 175
  350  |-----
  ---  | 2,8
_ 1400
  1400
  ----
     0
```

Ответ: 4,9 : 1,75 = 2,8.

Пример 6. Найдём частное 0,896 : 0,28:
0,896 : 0,28 = 89,6 : 28;

```
_ 89,6 | 28
  84   |-----
  --   | 3,2
 _ 56
   56
   --
    0
```

Ответ: 0,896 : 0,28 = 3,2.

```
  0,5 | 3
_ 5   |------
  -   | 0,166
  3
_ 20
  18
  --
 _ 20
   18
   --
    2
```

ДЕЛЕНИЕ НА ДЕСЯТИЧНУЮ ДРОБЬ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В примерах, рассмотренных выше, для вычисления частного десятичных дробей мы прибегали к делению уголком. Однако этот приём годится далеко не всегда.

Пусть нужно найти частное 0,05 : 0,3. Попробуем вычислить его с помощью деления уголком. Так как 0,05 : 0,3 = 0,5 : 3, то будем делить 0,5 на 3.

Вы видите, что в процессе деления всё время повторяется один и тот же остаток — число 2. Поэтому деление никогда не закончится, сколько бы мы его ни продолжали.

Найдём частное чисел 0,05 и 0,3 по-другому, перейдя к обыкновенным дробям:

$$0{,}05 : 0{,}3 = \frac{5}{100} : \frac{3}{10} = \frac{5}{100} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, $0{,}05 : 0{,}3 = \frac{1}{6}$, т. е. это частное равно дроби, которая в десятичную не обращается. Поэтому деление уголком и оказалось бесконечным.

Частное десятичных дробей всегда можно найти, перейдя к обыкновенным дробям. Причём иногда вычислить частное по-другому просто невозможно.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДЕЛЕНИЕ НА ДЕСЯТИЧНУЮ ДРОБЬ

Пример 7. Вычислим частное

$$1{,}2 : 0{,}7.$$

Запишем это частное в виде дроби и затем, воспользовавшись основным свойством дроби, преобразуем её так, чтобы в числителе и знаменателе оказались целые числа:

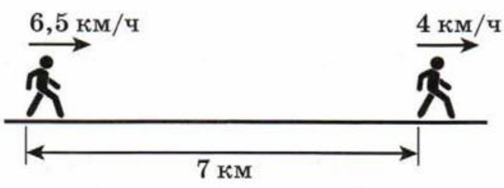
$$1{,}2 : 0{,}7 = \frac{1{,}2}{0{,}7} = \frac{1{,}2 \cdot 10}{0{,}7 \cdot 10} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}.$$

Пример 8. Найдём значение выражения $\frac{1{,}4 \cdot 0{,}2}{2{,}1}$.

Воспользуемся основным свойством дроби и преобразуем выражение так, чтобы в числителе и знаменателе дроби оказались натуральные числа:

$$\frac{1{,}4 \cdot 0{,}2}{2{,}1} = \frac{1{,}4 \cdot 10 \cdot 0{,}2 \cdot 10}{2{,}1 \cdot 100} = \frac{14 \cdot 2}{21 \cdot 10} = \frac{2}{15}.$$

Задача. Первый пешеход идёт со скоростью 4 км/ч, а второй идёт вслед за ним со скоростью 6,5 км/ч. В начальный момент времени расстояние между ними равно 7 км. Через какое время второй пешеход догонит первого?



1) $6{,}5 - 4 = 2{,}5$ (км/ч) — скорость сближения пешеходов;

2) $7 : 2{,}5 = \frac{70}{25} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ (ч) — время, по истечении которого второй пешеход догонит первого.

Ответ: Через 2 ч 48 мин.

В мешке 300 г одинаковых монет. Масса одной монеты 1,5 г. Сколько монет в мешке?
Решение.
$300 : 1{,}5 = \frac{3000}{15} = 200$ (монет).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- На примере вычисления частного 5,4 : 0,18 расскажите, как можно разделить уголком десятичную дробь на десятичную.
- Вычислите частное 0,4 : 3.
- Представьте дробь $\frac{5}{8}$ в виде десятичной двумя способами.

УПРАЖНЕНИЯ

ДЕЛЕНИЕ УГОЛКОМ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

218 Выполните деление (используйте в качестве образца пример 1 на с. 72):
а) 192,6 : 9; в) 30,25 : 5; д) 28,29 : 23;
б) 477,4 : 14; г) 336,6 : 11; е) 68,25 : 25.

219 Вычислите (используйте в качестве образца пример 2 на с. 73):
а) 4,41 : 7; в) 4,65 : 15; д) 0,121 : 11;
б) 8,28 : 9; г) 10,71 : 21; е) 0,084 : 7.

220 Найдите частное (в качестве образца воспользуйтесь примером 3 на с. 73):
а) 5,87 : 2; в) 10,4 : 5; д) 14,7 : 12;
б) 10,63 : 2; г) 13,8 : 15; е) 44,5 : 4.

221 Найдите частное натуральных чисел, выполнив деление уголком:
а) 157 : 2; в) 304 : 5; д) 120 : 25; ж) 531 : 15;
б) 78 : 4; г) 490 : 4; е) 300 : 8; з) 300 : 16.

222 Обратите обыкновенную дробь в десятичную, разделив уголком числитель на знаменатель:
а) $\frac{19}{40}$; б) $\frac{18}{25}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{7}{16}$.

223 Вычислите частное устно и результат проверьте умножением:
а) 0,8 : 4; в) 2,1 : 3; д) 6,5 : 5; ж) 7,2 : 3;
б) 0,9 : 3; г) 3,5 : 7; е) 5,2 : 4; з) 9,8 : 2.

224 а) Все конфеты разложили поровну в 8 коробок. Чему равна масса конфет в каждой коробке, если всего было 3,6 кг конфет?
б) Из 13,5 м ткани можно сшить 5 одинаковых костюмов. Сколько ткани требуется для одного костюма?

225 а) Собака весит 20,2 кг. Щенок в 4 раза легче, а кошка в 10 раз легче собаки. Сколько весит щенок и сколько кошка?
б) В первом бидоне в 3 раза больше молока, чем во втором, а во втором в 2 раза больше, чем в третьем. Сколько молока во втором и третьем бидонах, если в первом 4,5 л молока?

226 а) Из проволоки согнули треугольник со сторонами 7,5 см, 8,3 см и 9,4 см. Затем из этой же проволоки согнули квадрат. Чему равна его сторона?
б) Из проволоки согнули квадрат со стороной 8,4 см. Из этой же проволоки согнули равносторонний треугольник. Чему равна его сторона?

227 а) В одном пакете 1,5 кг кофе, а в другом 0,9 кг. Сколько кофе надо пересыпать из одного пакета в другой, чтобы кофе в них оказалось поровну? Сколько кофе будет после этого в каждом пакете?

б) В двух пакетах 1,3 кг семян. Если из одного пакета пересыпать в другой 0,15 кг семян, то семян в пакетах станет поровну. Сколько семян было в каждом пакете первоначально?

228 а) С двух ульев собрали 43,3 кг мёда. С одного из них получили на 1,7 кг меньше, чем с другого. Сколько килограммов мёда собрали с каждого улья?
б) Яблоко и груша вместе весят 0,625 кг. Яблоко тяжелее груши на 0,185 кг. Сколько весит яблоко и сколько груша?

229 а) Масса двух кусков сыра 1,4 кг. Один из них в 3 раза тяжелее другого. Найдите массу большего куска.
б) В двух пакетах 3,75 кг конфет. В одном пакете конфет в 2 раза меньше, чем в другом. Сколько конфет в большем пакете?

230 Прямоугольник и квадрат имеют одинаковые периметры. Чему равна площадь квадрата, если длины сторон прямоугольника равны 1,8 см и 3,4 см?

ДЕЛЕНИЕ УГОЛКОМ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА ДЕСЯТИЧНУЮ

231 Преобразуйте частное так, чтобы делитель был целым числом:
а) 30,5 : 0,4; б) 3,9 : 0,06; в) 26 : 0,013.

Выполните деление (№ 232—234).

232 а) 17,4 : 0,6; в) 4,95 : 1,5; д) 3,36 : 1,5;
б) 30,6 : 0,9; г) 0,343 : 0,7; е) 8,46 : 1,2.

233 а) 512 : 0,16; в) 12,25 : 0,005; д) 81,2 : 0,35;
б) 198 : 0,036; г) 15,3 : 0,015; е) 1050 : 4,2.

234 а) 8,9 : 0,4; в) 0,2106 : 3,9; д) 11,1 : 0,04;
б) 3,08 : 0,05; г) 1,23 : 0,6; е) 0,04 : 2,5.

235 Найдите частное и результат проверьте умножением:
а) 8,04 : 6,7; б) 1,072 : 0,8; в) 0,945 : 1,8; г) 70 : 5,6.

236 Вычислите устно:
а) 12 : 0,3; 6 : 0,6; 15 : 0,1; 48 : 0,8;
б) 0,35 : 0,07; 1,6 : 0,2; 0,24 : 0,12; 0,3 : 0,3.

237 а) Шаг ребёнка 0,3 м. Сколько шагов надо сделать ребёнку, чтобы пройти 6 м?
б) Каждая таблетка содержит 0,25 мг лекарства. Сколько таблеток в день должен принять больной, если ему назначено 2 мг лекарства в сутки?

238 а) С какой скоростью шёл поезд, если на 45,6 км он затратил 0,6 ч?
б) Какое время потребуется велосипедисту, чтобы проехать расстояние, равное 19,2 км, если он будет двигаться со скоростью 12,8 км/ч?

239 а) На упаковке товара указаны его стоимость и масса. Сколько стоит 1 кг этого товара, если 1,5 кг стоят 54 р.? 0,4 кг стоят 25 р.?
б) Цена некоторого товара 9,8 р. за 1 кг. Сколько купили этого товара, если за покупку заплатили 34,3 р.? 4,41 р.?

240 а) Сколько кусков ленты по 2,5 м каждый получится из мотка длиной 23 м?
б) В бидоне 4,6 л молока. Есть бутылки ёмкостью 0,5 л. Сколько потребуется таких бутылок, чтобы разлить в них всё молоко из бидона?

241 а) Машина с прицепом за день перевезла 97,2 т песка. Сколько рейсов сделала машина, если в её кузов вмещается 5,2 т песка, а в прицеп — 2,9 т?
б) Чтобы сшить кухонные полотенца, хозяйка отрезала от куска полотна длиной 5,5 м несколько кусков по 0,65 м каждый. У неё остался кусок длиной 0,95 м. Сколько полотенец сшила хозяйка?

242 Чтобы приготовить подарки к детскому празднику, купили шоколадные конфеты и карамель. Шоколадных конфет взяли 4,2 кг, а карамели — на 2,4 кг больше. Масса шоколадных конфет в одном подарке составляет 0,175 кг. А сколько карамели в каждом подарке? (Все подарки одинаковы.)

243 Какое из частных больше и во сколько раз (постарайтесь ответить на вопрос, не выполняя вычислений):
1) 10,2 : 1,7 или 102 : 1,7;
2) 10,2 : 1,7 или 1,02 : 1,7;
3) 10,2 : 1,7 или 10,2 : 170;
4) 10,2 : 1,7 или 10,2 : 0,017?

244 Зная, что 17 : 8 = 2,125, найдите частное:
1) 1,7 : 0,8;
2) 0,17 : 8;
3) 17 : 0,08.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНОГО ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

245 Найдите частное, представив данные дроби в виде обыкновенных, и, если возможно, выразите ответ десятичной дробью:
а) 0,7 : 0,3;
б) 3,5 : 3;
в) 2,5 : 9;
г) 4,2 : 2,8;
д) 0,33 : 0,9;
е) 0,24 : 1,5;
ж) 3,5 : 1,5;
з) 0,04 : 1,2;
и) 3 : 1,2.

246 Найдите значение выражения:
а) $\frac{0,4}{0,5}$;
б) $\frac{0,25}{1,5}$;
в) $\frac{1,7}{0,3}$;
г) $\frac{12,6}{1,2}$;
д) $\frac{3,8}{20}$;
е) $\frac{0,24}{0,9}$;
ж) $\frac{1}{0,6}$;
з) $\frac{8}{1,4}$.

247 а) Скорость велосипедиста 12 км/ч. Сколько метров проезжает он за 1 мин?
б) Скорость автомобиля 90 км/ч. Какой путь он проезжает за 1 мин?

248 а) Какую часть улицы асфальтирует машина за 1 ч, если на асфальтирование всей улицы требуется 4 ч? 2,5 ч? 1,5 ч?

б) Какую часть пути проехал автомобиль за 1 ч, если он, двигаясь с одной и той же скоростью, весь путь проехал за 2 ч? за 1,5 ч? за 1,2 ч?

249 а) Чтобы сшить одну юбку, требуется 1,8 м ткани. Сколько таких юбок получится из 15 м этой ткани?
б) На один бант для детского костюма требуется 0,35 м ленты. Сколько таких бантов можно изготовить из 10 м ленты?

250 а) В мешке в 1,5 раза больше сахара, чем в коробке, и в 12,5 раза больше, чем в банке. Сколько сахара в коробке и сколько в банке, если в мешке 37,5 кг сахара?
б) Собака в 2,5 раза тяжелее щенка, а щенок в 2,5 раза тяжелее котёнка. Сколько весит щенок и сколько котёнок, если собака весит 5,5 кг?

251 а) Чтобы сшить 15 одинаковых юбок, требуется 12 м ткани. Сколько таких же юбок получится из 4,8 м этой ткани?
б) На 15 одинаковых брюк требуется 18 м ткани. Сколько ткани останется, если из 18 м сшить всего 8 таких брюк?

РАЗНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

252 Вычислите:
а) $\frac{3,4+2,8}{0,2}$; б) $\frac{1,2}{1-0,4}$; в) $\frac{3+0,5}{3-0,5}$; г) $\frac{4,5-2,7}{14,6+15,4}$; д) $\frac{0,04 \cdot 0,25}{0,9-0,88}$.

253 Вычислите:
а) $\frac{5 \cdot 0,1}{0,6}$; б) $\frac{0,5 \cdot 3}{0,3}$; в) $\frac{10 \cdot 0,7}{4}$; г) $\frac{13}{2,6 \cdot 0,5}$; д) $\frac{0,2 \cdot 7}{0,42}$; е) $\frac{1,12}{5,6 \cdot 3}$.

254 Вычислите частное:
а) $\frac{2}{3} : 0,2$; б) $1,4 : \frac{2}{7}$; в) $\frac{8}{9} : 1,6$; г) $\frac{5}{6} : 1,5$; д) $\frac{5}{12} : 0,01$; е) $0,8 : \frac{4}{7}$.

255 Два катера одновременно отправились от одной пристани в одном направлении. Их скорости соответственно равны 20 км/ч и 30 км/ч.
1) Какое расстояние будет между ними через 1 ч? через 1,5 ч?
2) Через сколько часов расстояние между ними будет равно 25 км?

256 Из двух городов, расположенных на одном шоссе, одновременно в одном направлении выехали два автобуса. Скорость первого автобуса 50 км/ч, второго 70 км/ч. Через какое время второй автобус догонит первый автобус, если расстояние между городами равно 45 км?

257 Вычислите:
а) $\frac{5,8-2,65}{1,4 \cdot (3,7-2,2)}$; в) $\frac{3,5 \cdot (4,9-4,6)}{2 \cdot (4,5-3,6)}$;
б) $\frac{(15,94+17,54) \cdot 3}{10,06+14,24}$; г) $\frac{(36,8-28,9) \cdot 3}{(12,52+12,48) \cdot 0,4}$.

16 ОКРУГЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

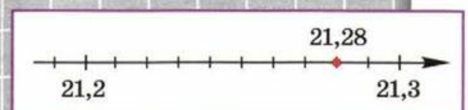
ВЫ УЗНАЕТЕ

- По каким правилам округляют десятичные дроби
- Чем отличается округление десятичных дробей от округления натуральных чисел

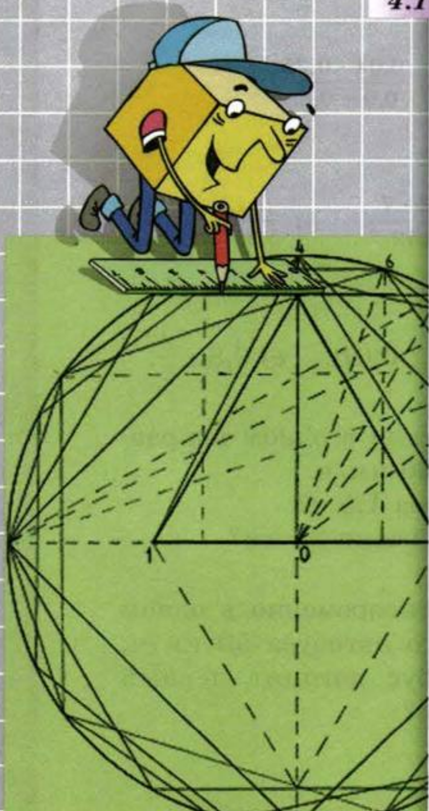
При использовании десятичных дробей в практических расчётах их обычно округляют. Вот пример такой ситуации.

Когда выдают документы на жильё, в них указывают площади всех помещений в квартире. Какую площадь внесут в документ, если комната имеет прямоугольную форму и её размер $5,6 \times 3,8$ м?

Перемножив числа 5,6 и 3,8, получим 21,28. Но в документах при указании площади помещения принято ограничиваться десятыми долями квадратного метра. В данном случае будет записано 21,3 м^2. Число 21,3 — результат округления дроби 21,28 до десятых.



4.1



КАК ОКРУГЛЯЮТ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ Обратимся ещё раз к примеру, рассмотренному выше. Число 21,28 заключено между десятичными дробями 21,2 и 21,3 (рис. ***4.1***). Первая из них — приближённое значение числа 21,28 с недостатком, а вторая — приближённое значение с избытком. Какое из них ближе к числу 21,28? Очевидно, что 21,3. Поэтому при округлении десятичной дроби 21,28 до десятых её и заменяют числом 21,3:

$$21,28 \approx 21,3.$$

Натуральные числа округляют до десятков, сотен, тысяч и т. д., а десятичные дроби можно округлять до единиц, десятых, сотых и т. д.

При округлении десятичной дроби её заменяют близкой дробью, но с меньшим числом десятичных знаков или даже целым числом. При этом выбирают такое приближённое значение, при котором ошибка получается меньше.

Приведём примеры:

$3,802 \approx 4$ — округление до единиц (3,802 ближе к 4, чем к 3);

$3,802 \approx 3,8$ — округление до десятых (3,802 ближе к 3,8, чем к 3,9);

$3,802 \approx 3,80$ — округление до сотых (3,802 ближе к 3,80, чем к 3,81).

Обратите внимание на последнее приближённое равенство: чтобы показать, что округление проведено до сотых, сохраняют цифру нуль в разряде сотых.

ПРАВИЛО ОКРУГЛЕНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ Рассмотренные примеры подсказывают правило, по которому дроби можно округлять, не выбирая лучшее из двух приближённых значений. Это правило представлено на следующей схеме:

Подчеркните разряд, до которого число округляют, и посмотрите на цифру, расположенную справа от него

Справа одна из цифр

0, 1, 2, 3, 4

Отбросьте цифры, расположенные правее подчёркнутого разряда

5, 6, 7, 8, 9

Отбросьте цифры, расположенные правее подчёркнутого разряда, а к цифре этого разряда прибавьте 1

Пример 1. Округлим дробь 0,172504 до десятых:

$$0,\underline{1}72504 \approx 0,2.$$

Мы отбросили цифры правее разряда десятых. Так как справа от этого разряда стоит цифра 7, то прибавили единицу к цифре разряда десятых.

Пример 2. Округлим дробь 0,39608 до сотых:

$$0,3\underline{9}608 \approx 0,40.$$

Это трудный случай. Прибавив единицу к цифре 9 в разряде сотых, мы получили 10 сотых. Поэтому в разряде сотых оказался 0, а в разряде десятых добавилась одна разрядная единица.

ПРИБЛИЖЁННОЕ ЧАСТНОЕ Не всякую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной. Но для практических расчётов десятичные дроби удобнее, поэтому при необходимости обыкновенную дробь заменяют близкой ей десятичной дробью.

Пример 3. В пошивочной мастерской из 10 м ткани изготовили 6 одинаковых детских костюмов, и обрезков практически не осталось. Сколько примерно ткани пошло на один костюм?

Естественная форма ответа в такой задаче — это указание метров и сантиметров. Поэтому будем делить уголком 10 на 6 до тех пор, пока не узнаем цифру в разряде тысячных. У нас получилось 1,666. Таким образом, на один костюм пошло примерно 1,67 м, т. е. 1 м 67 см.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Проиллюстрируйте правило округления десятичных дробей на примере округления дроби 0,2835 до сотых и до тысячных.
- До какого разряда округляли десятичную дробь, если в результате получилось число: а) 72,4; б) 1,50?
- Приведите пример, когда в результате округления десятичной дроби получается целое число.

УПРАЖНЕНИЯ

ОКРУГЛЕНИЕ ПО СМЫСЛУ

258 Прочитайте двойное неравенство. К какому из двух крайних чисел ближе среднее число:

а) $6 < 6{,}3 < 7$;
б) $9 < 9{,}6 < 10$;
в) $14{,}3 < 14{,}37 < 14{,}4$;
г) $20{,}1 < 20{,}12 < 20{,}2$?

259 Какое из приближённых равенств точнее:

а) $0{,}36 \approx 0{,}4$ или $0{,}36 \approx 0{,}3$;
б) $1{,}654 \approx 1{,}6$ или $1{,}654 \approx 1{,}7$;
в) $2{,}834 \approx 2{,}83$ или $2{,}834 \approx 2{,}84$?

260 а) Расстояние на море измеряется в милях. В 1 морской миле содержится 1,852 км. Округлите это число до десятых; до единиц. Скольким целым километрам примерно равна 1 морская миля?
б) До введения метрической системы мер расстояния на Руси мерили вёрстами: 1 верста $\approx$ 1,0668 км. Округлите это число до сотых; до десятых. Скольким целым километрам примерно равна 1 верста?

ОКРУГЛЕНИЕ ПО ПРАВИЛУ

261 Округлите до единиц:

а) 38,459;
б) 105,83;
в) 0,963;
г) 30,782;
д) 9,5004;
е) 29,48.

262 Округлите число до десятых; до сотых; до тысячных:

а) 28,37267; б) 43,52859; в) 106,09311; г) 4,03954.

263 Округлите:

1) десятичную дробь 282,0954 до десятых; до сотых; до тысячных;
2) натуральное число 2 820 954 до десятков; до сотен; до тысяч.

Чем похожи и чем различаются округление натуральных чисел и округление десятичных дробей?

264 Ленту длиной 2,5 м разрезали на 8 равных частей. Найдите длину каждой части и округлите результат до сотых долей метра. Сколько примерно сантиметров содержится в каждой части?

265 Площадка для игры в бадминтон имеет размеры 13,4 м и 5,2 м. Найдите площадь игрового поля. Числовое значение площади округлите до единиц.

266 Коля купил несколько продуктов массой 0,756 кг, 1,2 кг и 2,87 кг. Чтобы выяснить, тяжёлой ли будет сумка, он прикинул, сколько примерно килограммов ему придётся нести:

$$0{,}756 \approx 1; \quad 1{,}2 \approx 1; \quad 2{,}87 \approx 3; \quad 1 + 1 + 3 = 5 \text{ (кг)}.$$

Рассуждая таким же образом, прикиньте общую массу покупок, если масса каждой равна:
а) 2,05 кг, 3,7 кг и 0,925 кг; б) 0,6 кг, 1,87 кг, 2,2 кг и 3,08 кг.

267 Выполните прикидку результата, округлив десятичные дроби до единиц, а затем найдите точный ответ:
а) $2{,}8 + 3{,}1 + 0{,}7 + 3{,}3$; в) $1{,}9 \cdot 6{,}1$;
б) $21{,}51 + 19{,}92 + 10{,}06$; г) $4{,}08 \cdot 9{,}1$.

В каждом случае определите, какую погрешность вы допустили, заменив точное значение приближённым.

268 Округлите число 1,666666 до тысячных; до сотых; до десятых. В каждом случае найдите разность между полученным приближённым значением и данной дробью.

269 а) Найдите все десятичные дроби с тремя знаками после запятой, при округлении которых до сотых получается число 3,27. Укажите наибольшую и наименьшую из этих дробей.
б) Найдите наибольшую из десятичных дробей с четырьмя знаками после запятой, при округлении которой до сотых получается число 8,65.

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННОГО ЧАСТНОГО

270 Выразите приближённо обыкновенную дробь десятичной с одним, двумя, тремя знаками после запятой:
а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{2}{9}$; г) $\frac{4}{7}$.

271 Найдите приближённое значение частного, выраженное десятичной дробью с двумя знаками после запятой:
а) $7 : 0{,}3$; б) $0{,}28 : 0{,}9$; в) $3{,}5 : 1{,}5$; г) $2 : 1{,}2$.

272 а) Доску длиной 6,5 м распилили на 6 одинаковых частей. Чему равна длина каждой части? Ответ выразите в метрах и сантиметрах.
б) На упаковке с сахарным песком, взвешенной на электронных весах, указана её стоимость: 25,30 р. Цена 1 кг песка равна 21 р. Чему равна масса песка в упаковке? Ответ выразите в килограммах и граммах.

Неверно! Друзья — шестиклассники Петя и Коля выполняли задания на округление чисел.
Петя, округляя число 31526 до десятков, записал:
$$31526 \approx 3153.$$
Коля, округляя число 123,756 до десятых, записал:
$$123{,}756 \approx 120.$$
Исправьте их ошибки.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 1) На примерах вычисления суммы и разности чисел 28,4 и 16,65 расскажите, как складывают и вычитают десятичные дроби.
2) Найдите сумму $0{,}004 + 1{,}2637 + 8{,}7963$, выполнив вычисления столбиком.

2 1) По каким правилам десятичную дробь умножают и делят на 10, 100, 1000 и т. д.?
2) Вычислите: а) $24{,}24 \cdot 10$; б) $5{,}37 : 100$.
3) Выразите: а) 3,25 км в метрах; б) 830 г в килограммах.

3 1) Сформулируйте правило, по которому определяют положение запятой при умножении десятичной дроби на десятичную дробь; на натуральное число.
2) Вычислите: а) $7{,}68 \cdot 2{,}5$; б) $0{,}04 \cdot 50$; в) $0{,}2^3$.

4 1) Вычислите частное, выполнив деление уголком:
а) $7{,}92 : 6$;
б) $1{,}416 : 1{,}18$.
2) Представьте дробь $\frac{15}{8}$ в виде десятичной дроби двумя способами.

5 Округлите: а) число 572 до сотен; б) число 1,654 до сотых. Чем отличается округление десятичных дробей от округления натуральных чисел?

6 1) Вычислите частное $0{,}5 : 0{,}6$.
2) Выразите это частное приближённо десятичной дробью с двумя знаками после запятой.

7 Найдите значение выражения:
а) $0{,}3 + \frac{2}{5}$; б) $\frac{1}{3} \cdot 0{,}4$; в) $12 : 2{,}8$; г) $\frac{2}{1{,}5}$.

8 В первый день туристы прошли 0,3 всего маршрута. Сколько километров им осталось пройти, если весь маршрут составляет 40 км?

9 В лейке воды на 2,3 л больше, чем в ковше, а в ведре в 1,5 раза больше, чем в лейке. Сколько литров воды в трёх ёмкостях вместе, если в лейке 3,6 л?

10 С турбазы в одном направлении одновременно вышли два туриста со скоростями 3,5 км/ч и 4,3 км/ч. Какое расстояние будет между туристами через 2 ч?

глава 5
ОКРУЖНОСТЬ

- ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ
- ДВЕ ОКРУЖНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ
- ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА
- КРУГЛЫЕ ТЕЛА

ИНТЕРЕСНО

Дороги имеют обыкновение пересекаться. Для транспорта перекрёсток — это не только возможность сделать поворот, но и определённые проблемы. Чтобы машины, движущиеся в разных направлениях, не мешали друг другу, на больших магистралях строят развязки. В хитросплетении линий развязки, которая носит название «бабочка», легко различить прямые и фрагменты окружности.

17 ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ

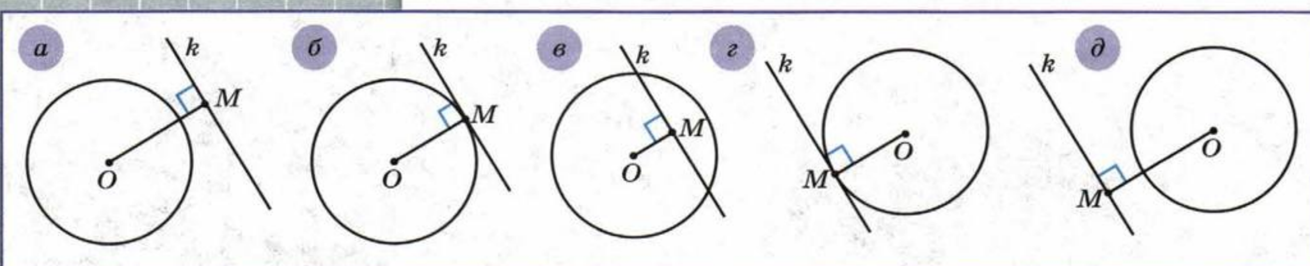
ВЫ УЗНАЕТЕ

- О том, какую прямую называют касательной к окружности
- Как построить касательную

Вы уже знаете, что в геометрии самые важные линии — это прямая и окружность. В главе 2 мы рассмотрели взаимное расположение двух прямых, и вы узнали, что две прямые на плоскости или пересекаются, или не пересекаются, т. е. являются параллельными. А прямая и окружность? Каким может быть их взаимное расположение?

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

На рисунке ***5.1***, *а* изображены окружность с центром в точке O и прямая k, её не пересекающая. Расстояние от центра O до прямой равно длине перпендикуляра OM. Оно больше радиуса окружности.



5.1

Будем теперь перемещать прямую параллельно самой себе, приближая её к центру окружности.

В какой-то момент расстояние от центра до прямой станет равным радиусу и точка M окажется на окружности (рис. ***5.1***, *б*). В этом случае прямую k называют **касательной** к окружности, а точку M — **точкой касания.**

Продолжим движение прямой к центру. Расстояние от центра до прямой сначала будет уменьшаться, а после того как прямая пройдёт через центр, будет снова увеличиваться. Всё время, пока это расстояние будет меньше радиуса, прямая будет пересекать окружность (рис. ***5.1***, *в*). Как только оно опять станет равным радиусу, мы получим ещё одну касательную (рис. ***5.1***, *г*).

А затем прямая и окружность вновь не будут иметь общих точек (рис. ***5.1***, *д*).

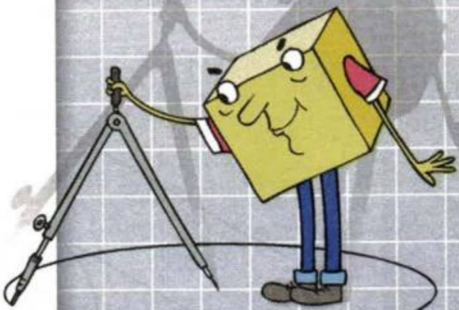
Касательная играет важную роль при описании многих физических явлений. Взгляните на фото: частички песка, земли, вырывающиеся из-под колеса автомобиля, летят по касательной к кругу в точке касания. Точно так же ведут себя и искры — раскалённые частички точильного камня, оторвавшиеся от него.

Прямая и окружность могут иметь одну общую точку (прямая является касательной к окружности), две общие точки (в этом случае прямую называют *секущей*), а могут и не иметь общих точек.

ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ Из рисунка *5.1*, *б* понятно следующее важное свойство касательной:

> **!** Касательная перпендикулярна радиусу окружности, проведённому в точку касания.

На этом свойстве основан способ построения касательной к окружности.

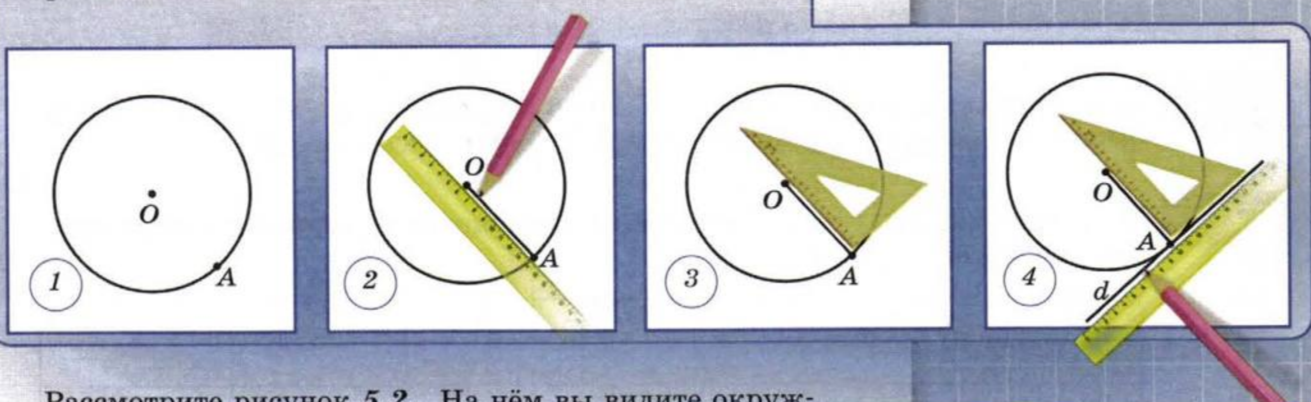


Пусть дана окружность с центром в точке O и на ней отмечена точка A (рис. (1)). Проведите касательную к окружности в точке A. Для этого:

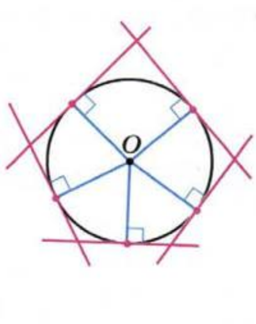
1) проведите радиус OA (рис. (2));

2) постройте прямую d, перпендикулярную радиусу OA и проходящую через точку A (рис. (3), (4)).

Прямая d — касательная к окружности в точке A.



Рассмотрите рисунок *5.2*. На нём вы видите окружность, на которой отмечены 5 точек. В каждой из них проведена касательная к окружности. Пересекаясь, касательные образуют пятиугольник. Обратите внимание: окружность касается каждой стороны пятиугольника. В таком случае говорят, что окружность вписана в пятиугольник или что пятиугольник описан вокруг окружности. Точно так же можно начертить, например, треугольник, описанный вокруг окружности, окружность, вписанную в четырёхугольник.



5.2

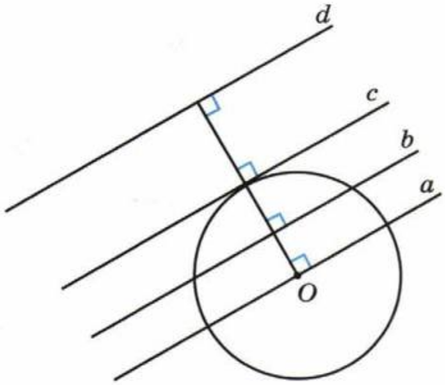
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Перечислите все случаи взаимного расположения прямой и окружности.
- Радиус окружности равен 2 см (рис. *5.1*). На каком рисунке изображён случай, когда расстояние от центра окружности до прямой равно 1 см? 3 см? 2 см?
- Каким свойством обладает касательная к окружности?
- Сколько можно провести касательных к окружности, параллельных некоторой прямой?
- Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность?

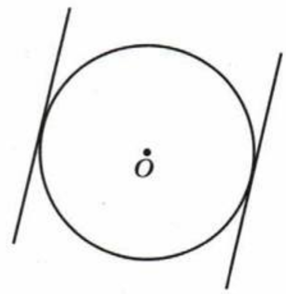
УПРАЖНЕНИЯ

КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТИ

273 Какая из четырёх параллельных прямых является касательной к окружности (рис. *5.3*)?



5.3



5.4

274 К окружности, радиус которой равен 6 см, проведены две параллельные касательные (рис. *5.4*). Чему равно расстояние между ними?

275 В таблице даны радиус окружности и расстояние от центра этой окружности до некоторой прямой.

Радиус окружности, см	3	3	3
Расстояние от центра окружности до прямой, см	2	3	4

Что можно сказать о взаимном расположении прямой и окружности в каждом случае? Проверьте себя, выполнив построения.

276 Как надо провести прямую, пересекающую окружность, чтобы длина отрезка, соединяющего точки пересечения, была наибольшей?

277 Начертите произвольную окружность и отметьте на ней точку A. Постройте касательную к окружности в точке A.

278 Начертите окружность радиусом 3 см. Проведите какую-нибудь прямую через центр окружности. Постройте касательные к окружности:

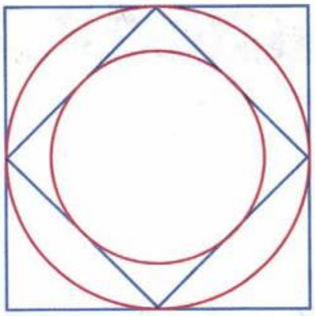
а) перпендикулярные проведённой прямой;

б) параллельные проведённой прямой.

279 Начертите окружность. Проведите: а) три касательные к окружности так, чтобы они образовали треугольник; б) четыре касательные к окружности так, чтобы образовался четырёхугольник.

280 Начертите в тетради квадрат со стороной 8 см. Постройте окружность, вписанную в этот квадрат.

281 Скопируйте рисунок *5.5*.



5.5

ГДЕ ЛЕЖАТ ЦЕНТРЫ ОКРУЖНОСТЕЙ

282 Начертите две параллельные прямые. Постройте какую-нибудь окружность, для которой обе эти прямые являются касательными. Сколько таких окружностей можно построить? Где лежат их центры?

283 Проведите прямую и постройте какую-нибудь окружность радиусом 3 см, для которой эта прямая является касательной. Сколько таких окружностей можно построить? Где расположены их центры?

284 Проведите прямую и отметьте на ней произвольную точку M. Постройте несколько окружностей разных радиусов, касающихся данной прямой в точке M. Где лежат центры всех таких окружностей?

285

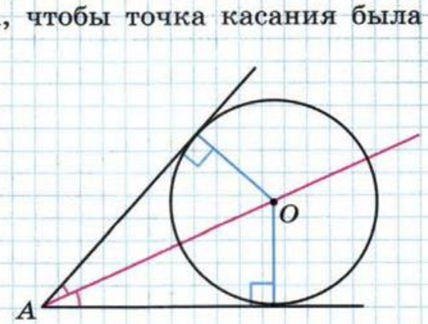
ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Рассмотрите рисунок. Вы видите угол A и окружность, которая касается сторон этого угла. Центр окружности лежит на биссектрисе угла A. Объясните, как начертить окружность, касающуюся сторон угла.

2) Начертите произвольный угол и постройте окружность, касающуюся сторон угла.

3) Начертите угол, равный 40°. Постройте окружность, касающуюся сторон угла, центр которой удалён от вершины угла на 5 см.

4) Начертите угол, равный 50°. Постройте такую окружность, касающуюся сторон угла, чтобы точка касания была удалена от вершины угла на 3 см.



18

ДВЕ ОКРУЖНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

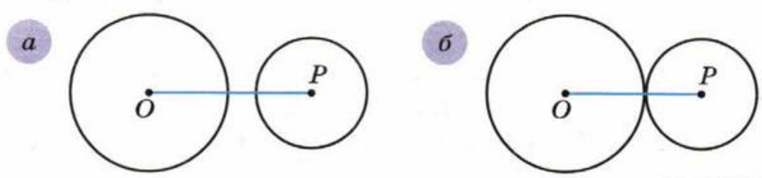
ВЫ УЗНАЕТЕ

- О том, что касание окружностей может быть внешним или внутренним
- Какие окружности называют концентрическими
- Как найти точку, равноудалённую от концов отрезка

Мы рассмотрели взаимное расположение двух прямых, прямой и окружности. Теперь рассмотрим взаимное расположение двух окружностей. Две окружности пересекаются, не пересекаются или касаются друг друга. Однако различают два разных случая касания окружностей. Да и не пересекаться окружности могут по-разному, ведь одна окружность может оказаться внутри другой. Чтобы рассмотреть все случаи взаимного расположения двух окружностей, снова используем перемещение.

ДВЕ ОКРУЖНОСТИ На рисунке ***5.6***, *а* изображены две окружности. Точка O — центр большей окружности, точка P — центр меньшей. Центры окружностей соединены отрезком. Меньшая окружность целиком находится вне большей, и, как вы видите из рисунка, в этом случае расстояние OP между их центрами больше суммы радиусов.

Окружности часто можно видеть на различных эмблемах. Например, эмблема Олимпийских игр — это пять сплетённых колец.

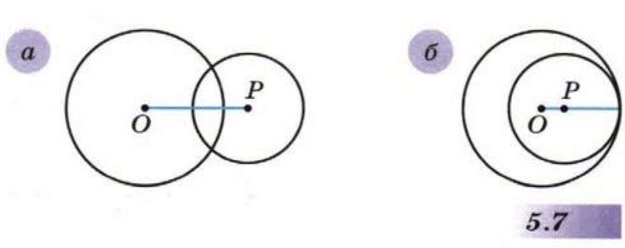


5.6

Начнём перемещать меньшую окружность по направлению к большей. При этом центры окружностей будут сближаться.

В какой-то момент меньшая окружность коснётся большей, а расстояние OP между центрами станет равным сумме радиусов (рис. ***5.6***, *б*). Такое касание окружностей называется *внешним*.

Если дальше сближать центры, то окружности сначала будут пересекаться (рис. ***5.7***, *а*), а затем снова коснутся друг друга (рис. ***5.7***, *б*). На этот раз касание будет *внутренним*, потому что меньшая окружность целиком окажется внутри большей. В этом случае расстояние OP между центрами станет равным разности радиусов.



5.7

Сближая и дальше центры окружностей, мы снова получим непересекающиеся окружности, но теперь меньшая будет лежать внутри большей (рис. *5.8*, *а*).

В случае когда центры совпадают, окружности называют *концентрическими* (рис. *5.8*, *б*).

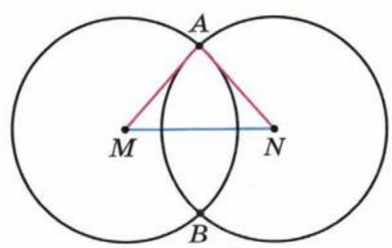
5.8

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧКИ, РАВНОУДАЛЁННОЙ ОТ КОНЦОВ ОТРЕЗКА

Середина отрезка одинаково удалена от его концов. И другой такой точки на отрезке нет. А вот на плоскости есть.

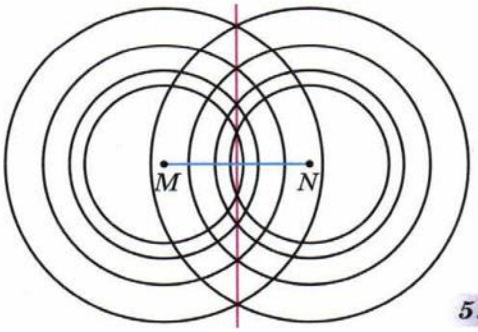
Найти точки, равноудалённые от концов отрезка, нам помогут две окружности.

Возьмём отрезок MN и проведём две *пересекающиеся* окружности *равных* радиусов с центрами в точках M и N (рис. *5.9*). (Чтобы эти окружности пересеклись, радиус каждой из них должен быть больше половины отрезка MN.) На рисунке точки пересечения окружностей обозначены буквами A и B. Точка A находится на одном и том же расстоянии от концов отрезка (оно равно радиусу окружности). Это же можно сказать и о точке B.



5.9

Проведём ещё пару окружностей равных радиусов — одну с центром в точке M, а другую с центром в точке N. И ещё. Каждый раз при этом мы будем получать две точки, равноудалённые от концов отрезка. И таких точек бесконечно много. Где лежат все такие точки? На прямой, перпендикулярной отрезку MN и проходящей через его середину (рис. *5.10*).



5.10

Бросив камешек в спокойную гладь водоёма, вы увидите, как от точки падения камня разбегается сразу несколько концентрических окружностей.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Расскажите о всех случаях взаимного расположения двух окружностей и изобразите их от руки.
- Пусть радиус одной окружности равен 4 см, а другой — 3 см. В каком случае касание окружностей будет внешним, а в каком внутренним?
- Пересекаются ли окружности, если их радиусы равны 4 см и 3 см, а расстояние между центрами: а) 7 см; б) 6 см; в) 8 см?
- Начертите отрезок $AB = 5$ см. Постройте точку C, удалённую от точек A и B на 4 см.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧЕРТИМ ОКРУЖНОСТИ

286 Начертите в тетради две равные окружности так, чтобы они: а) пересекались; б) не пересекались; в) касались друг друга. В каждом случае измерьте расстояние между центрами окружностей.

287 Начертите три концентрические окружности с радиусами 2 см, 3 см, 4 см.

288 Постройте две окружности по данным, приведённым в таблице. В каждом случае найдите расстояние между самыми близкими точками двух окружностей.

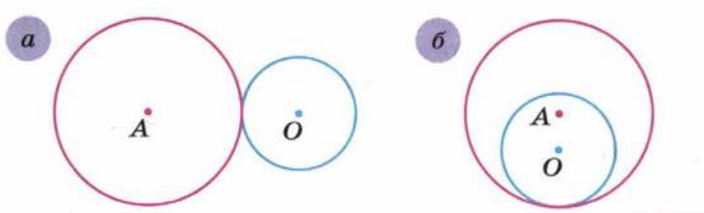
Расстояние между центрами, см	Радиус первой окружности, см	Радиус второй окружности, см
1	4	2
6	2	2
5	2	3

Указание. Начните с построения центров окружностей.

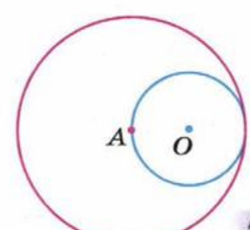
289 Выполните построения и ответьте на вопрос.
Расстояние между точками A и B равно 4 см. Точка A — центр окружности, радиус которой равен 1,5 см. Две окружности с центрами в точке B касаются окружности с центром в точке A. Чему равны их радиусы?

РЕШАЕМ ЗАДАЧУ ПО РИСУНКУ

290 а) Радиус меньшей окружности равен 3 см, радиус большей — 5 см (рис. ***5.11***). Чему равно расстояние между центрами окружностей?



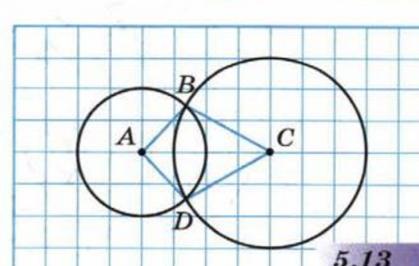
5.11



5.12

б) Расстояние между центрами окружностей равно 2,5 см (рис. ***5.12***). Чему равны радиусы окружностей?

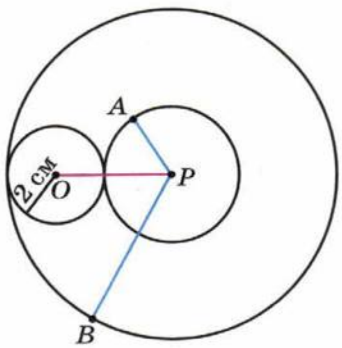
291 Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$ (рис. ***5.13***). (Считайте, что сторона одной клетки равна 5 мм.)



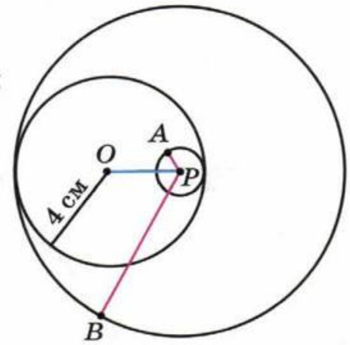
5.13

292 Проведены две окружности с центром в точке P и окружность с центром в точке O, которая касается первых двух (рис. ***5.14***). Известен радиус третьей окружности и расстояние между центрами. Найдите радиусы первых двух окружностей.

а $OP = 5$ см



б $OP = 3$ см



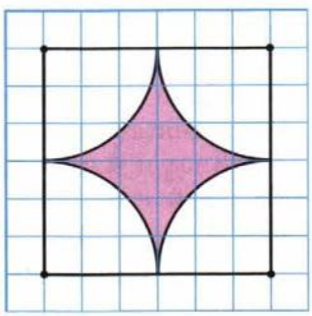
5.14

УЗОРЫ ИЗ ОКРУЖНОСТЕЙ

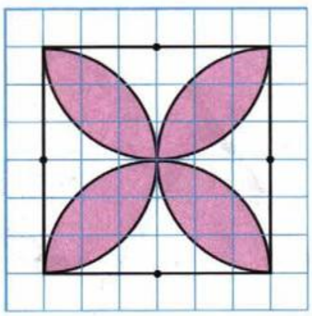
293 Постройте в тетради цветок, изображённый на рисунке ***5.15***.

5.15

а



б



5.16

294 Скопируйте узор, образуемый дугами окружностей (рис. ***5.16***).

РАССУЖДАЕМ ПО СХЕМАТИЧЕСКОМУ РИСУНКУ

295 Дополните предложение: «Две окружности пересекаются, если расстояние между их центрами ... суммы радиусов окружностей, но ... разности их радиусов». *Указание*. Сделайте схематические рисунки.

296 Радиусы двух окружностей равны 3 см и 5 см, а расстояние между наиболее удалёнными точками: а) 18 см; б) 16 см; в) 13 см; г) 8 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.
Подсказка. Выполните построение или воспользуйтесь рисунками ***5.6—5.8***.

297

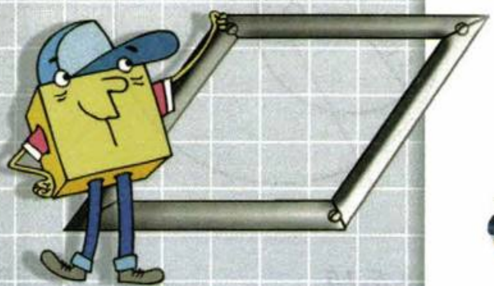
ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

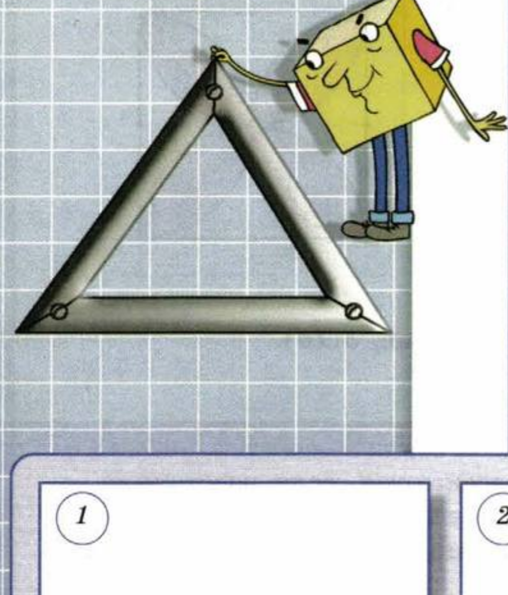
Для каждого случая взаимного расположения двух окружностей (рис. ***5.6***, ***5.7***) определите, сколько можно провести различных прямых, касающихся обеих окружностей.

19 ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как построить треугольник, если известны длины его сторон
- Что называют неравенством треугольника





Проведите такой эксперимент: соберите из элементов металлического конструктора четырёхугольник и треугольник и попробуйте подвигать их стороны. Четырёхугольник при этом будет трансформироваться, а треугольник нет. Говорят, что треугольник — жёсткая фигура. С чем это связано? Попробуем разобраться.

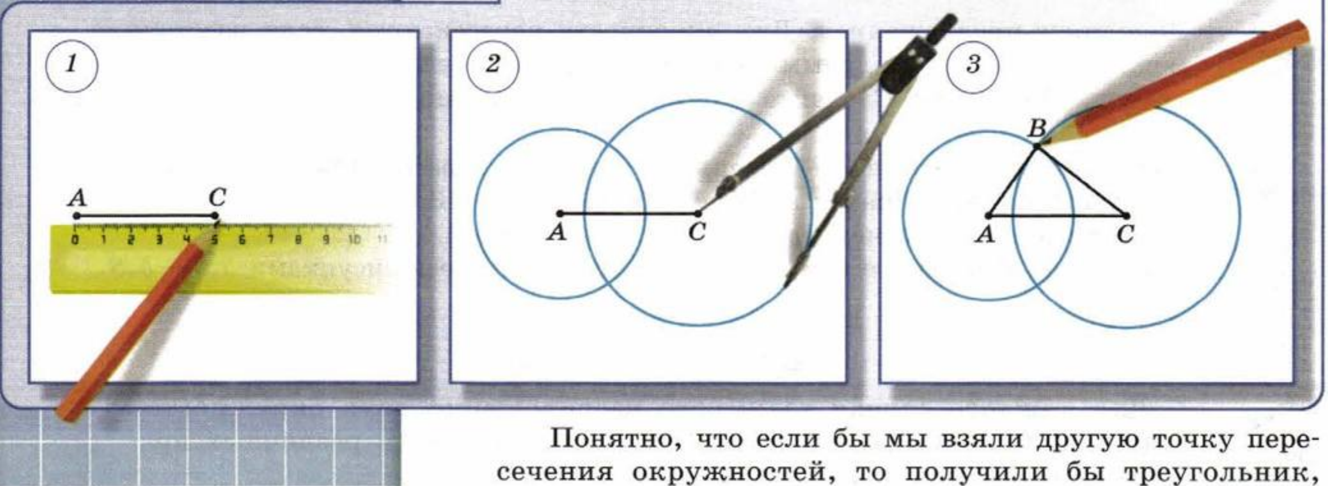
ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЁМ СТОРОНАМ Построим треугольник со сторонами, равными 3 см, 4 см и 5 см. Для этого нам придётся воспользоваться циркулем и линейкой.

1) Начертите отрезок, равный одной из сторон треугольника, например 5 см. Обозначьте его концы — две вершины будущего треугольника — буквами *A* и *C* (рис. 1).

2) Третья вершина треугольника удалена от одной вершины на 3 см, а от другой на 4 см, значит, она является точкой пересечения окружностей радиусов 3 см и 4 см с центрами в точках *A* и *C*. Проведите окружность с центром в точке *A* радиусом 3 см и окружность с центром в точке *C* радиусом 4 см (рис. 2).

3) Убедитесь, что окружности пересекаются в двух точках. Обозначьте одну из них буквой *B* и проведите отрезки *AB* и *BC* (рис. 3).

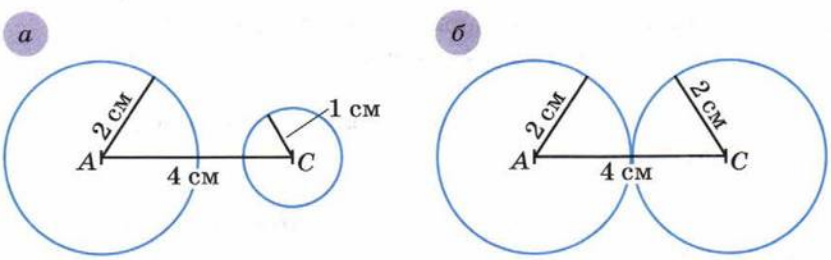
Вы получите треугольник *ABC*, имеющий заданные стороны.



Понятно, что если бы мы взяли другую точку пересечения окружностей, то получили бы треугольник, равный треугольнику *ABC*.

Теперь понятно, с чем связана жёсткость треугольника: как говорят математики, треугольник однозначно определяется тремя своими сторонами. На этом свойстве основано его широкое применение на практике, например для закрепления деталей различных конструкций.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА Из любых ли трёх отрезков можно построить треугольник? Попытаемся построить треугольник со сторонами 1 см, 2 см и 4 см. Сделать это нам не удастся (рис. ***5.17***, *а*): окружности не пересекутся. Неудача постигнет нас и в том случае, если мы попытаемся построить треугольник со сторонами 2 см, 2 см и 4 см (рис. ***5.17***, *б*): окружности лишь коснутся друг друга. Эти примеры показывают, что не любые три отрезка могут быть сторонами треугольника.



5.17

Возникает вопрос: в каком случае три отрезка могут быть сторонами треугольника, а в каком нет? Обратите внимание на то, что в первом построении окружности не пересеклись, потому что расстояние между их центрами больше суммы их радиусов (рис. ***5.17***, *а*). Во втором построении окружности не пересеклись, так как расстояние между центрами равно сумме радиусов (рис. ***5.17***, *б*).

Из проведённых построений понятно, что из трёх отрезков можно построить треугольник, если каждый из этих отрезков меньше суммы двух других. На самом деле достаточно проверить, что наибольший отрезок меньше суммы двух других.

Мы пришли к выводу, который математики называют **неравенством треугольника**.

! Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Постройте:

  а) треугольник со сторонами 4 см, 6 см и 7 см;

  б) равносторонний треугольник со стороной 5 см;

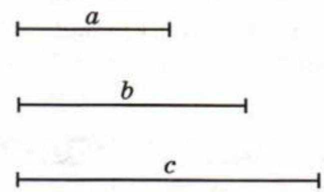
  в) равнобедренный треугольник, основание которого равно 4 см, а боковая сторона равна 5 см.

- Сформулируйте неравенство треугольника.
- Даны три отрезка. Как проверить, существует ли треугольник с такими сторонами?

УПРАЖНЕНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

298 Отрезки, изображённые на рисунке ***5.18***, — стороны треугольника. Постройте этот треугольник.



5.18

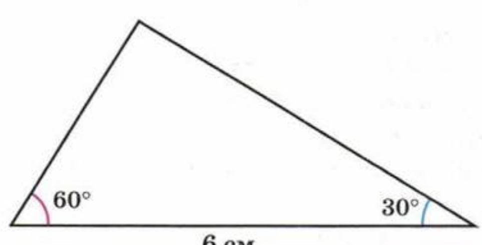
299 Построить треугольник можно не только тогда, когда заданы три его стороны. Можно построить треугольник и в том случае, если известны две его стороны и угол между ними.
Постройте треугольник со сторонами 3 см и 5 см и с углом между этими сторонами, равным 80°, по следующему алгоритму:
1) начертите угол, равный 80°;
2) на одной стороне угла отложите отрезок, равный 3 см, а на другой — равный 5 см;
3) соедините концы отрезков.

300 Постройте треугольник, если даны две его стороны и угол между ними:
а) 6 см, 7 см и 30°; б) 3 см, 4 см и 120°.

301 Постройте равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны 5 см, а угол между ними равен: а) 40°; б) 110°.

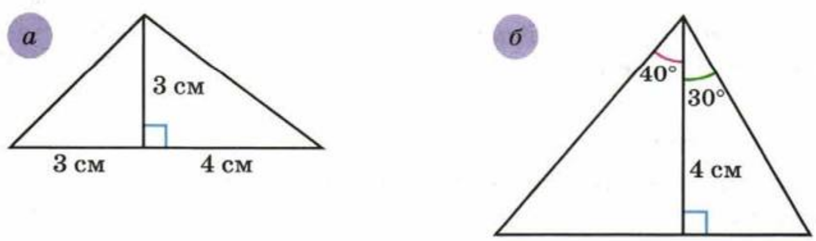
302 Постройте прямоугольный треугольник, у которого стороны, образующие прямой угол, равны 4 см и 3 см.

303 Рассмотрите рисунок ***5.19***. Какие элементы треугольника известны? Расскажите, как построить треугольник по этим элементам, и выполните построение.



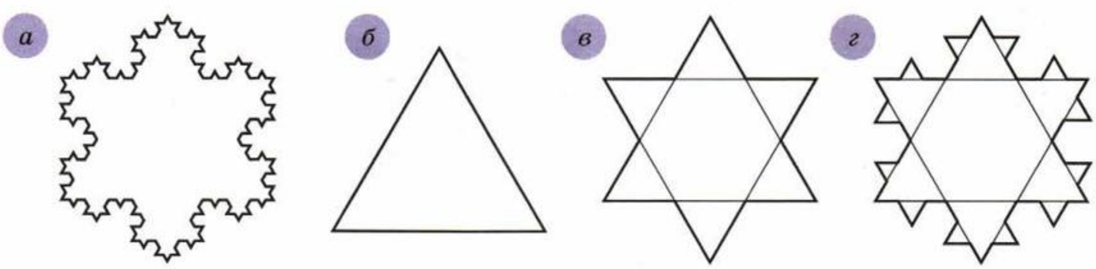
5.19

304 Постройте треугольник по элементам, заданным на рисунке ***5.20***.



5.20

305 Многоугольник, изображённый на рисунке ***5.21**, а*, называют **снежинкой Коха**. Постройте её. Для этого:
1) начертите на листе нелинованной бумаги равносторонний треугольник со стороной 9 см (рис. ***5.21**, б*);
2) каждую сторону треугольника разделите на 3 равные части и на средней части постройте равносторонний треугольник (рис. ***5.21**, в*);
3) повторите это построение на каждой из 12 сторон получившегося многоугольника (рис. ***5.21**, г*);
4) чтобы получить снежинку, изображённую на рисунке ***5.21**, а*, надо сделать ещё один шаг построения.



5.21

306 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

Во сколько раз увеличивается число сторон снежинки Коха на каждом шаге построения (см. рис. ***5.21***)? Во сколько раз при этом уменьшается длина её стороны? Для каждого шага построения определите число сторон снежинки и её периметр.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

307 1) Убедитесь, что нельзя построить треугольник, стороны которого равны:
а) 7 см, 3 см и 3 см; б) 6 см, 4 см и 2 см.
Измените длину одной из сторон так, чтобы треугольник можно было построить.

2) Можно ли построить треугольник со сторонами:
а) 11 см, 13 см, 25 см; б) 15 см, 6 см, 12 см; в) 20 см, 18 см, 38 см?

308 В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 7 см, а другая — 15 см. Какая сторона является основанием?

309 Даны четыре отрезка длиной 2 см, 3 см, 5 см и 6 см. Сколько различных разносторонних треугольников можно построить из этих отрезков?

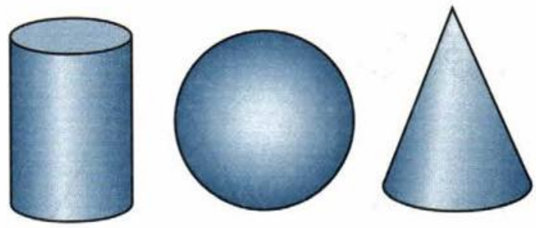
20 КРУГЛЫЕ ТЕЛА

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что представляют собой шар, цилиндр и конус
- Какие сечения они могут иметь

Формы предметов окружающего мира весьма разнообразны. Среди них встречаются не только многогранники, но и так называемые круглые тела. Прежде всего это **цилиндр, конус, шар.**

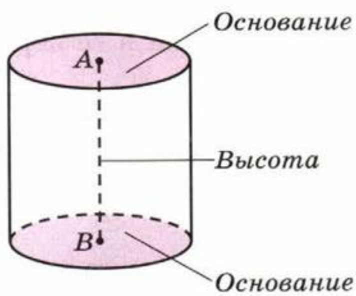
ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР У многогранника все части поверхности плоские. Поверхности цилиндра и конуса состоят как из плоских частей, так и кривых, а шар — «абсолютно круглый» (рис. *5.22*).



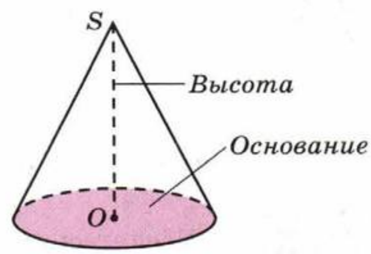
5.22

Слово «цилиндр» пришло к нам из Древней Греции и происходит от слова, означающего «валик». Форму цилиндра имеют многие предметы, созданные руками человека: колонны зданий, трубы, стаканы и др.

Поверхность цилиндра состоит из двух оснований и боковой поверхности, которую ещё называют *цилиндрической*. Основания цилиндра — это два равных круга, расположенные в параллельных плоскостях. На рисунке их изображают в виде двух *эллипсов* — «сплюснутых» окружностей (рис. *5.23*). Отрезок, соединяющий центры оснований, перпендикулярен каждому из них. Его называют *высотой цилиндра*.



5.23



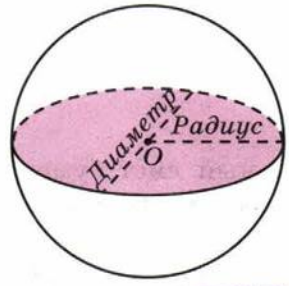
5.24

Слово «конус» переводится с древнегреческого как «шишка» или «верхушка шлема». Форму конуса имеют, например, воронка, горка песка, вулкан.

Конус в определённом смысле напоминает пирамиду. У него, как и у пирамиды, есть вершина и основание, только в основании лежит не многоугольник, а круг. Перпендикуляр, проведённый из вершины конуса к плоскости основания, попадает в центр круга (рис. *5.24*). Этот перпендикуляр называют *высотой конуса*.

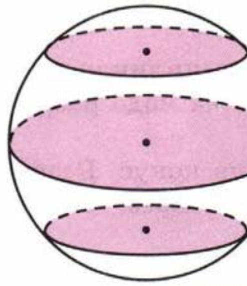
Особое место среди круглых тел занимает шар. Поверхность шара называется **сферой**. Древние греки считали сферу «наиболее прекрасной из твёрдых фигур».

У шара и сферы, так же как у круга и окружности, есть *центр*, *радиус* и *диаметр* (рис. **5.25**). Границей круга, как вам известно, является окружность, а границей шара — сфера.



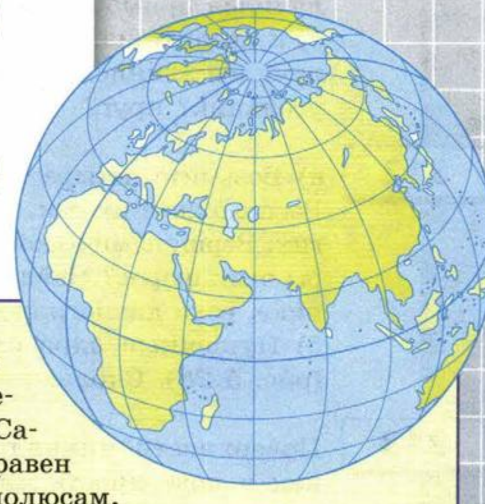
5.25

СЕЧЕНИЯ Ещё в древности математики интересовались тем, какие фигуры получаются при сечении этих тел плоскостью. Представьте, что шар рассекается плоскостью, подобно тому как апельсин разрезается ножом. При рассечении шара может получиться только круг. Диаметр круга будет наибольшим, когда плоскость сечения пройдёт через центр шара (рис. **5.26**). Соответствующие таким кругам окружности называются *большими окружностями*. Их диаметры равны диаметру шара.



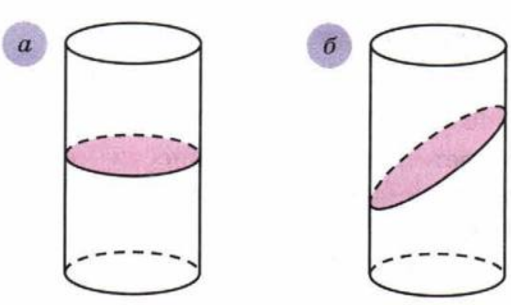
5.26

Мы называем нашу планету земным шаром (правда, шар этот чуть «сплюснут» у полюсов). А пример сферы — это оболочка мяча, плёнка мыльного пузыря. Само слово «сфера» происходит от греческого слова, означающего «мяч», «шар».



Вспомните параллели и меридианы, нанесённые на глобус. Параллели — это и есть окружности, получаемые при «разрезании» земного шара параллельными плоскостями. Самая большая параллель — это экватор, его диаметр равен диаметру Земли. Когда параллели приближаются к полюсам, их диаметры уменьшаются. Меридианы же — это большие полуокружности, проходящие через полюсы.

При рассечении цилиндра и конуса плоскостями наряду с окружностью получаются и другие линии. На рисунке **5.27**, *а* поверхность цилиндра рассекается плоскостью, которая параллельна его основаниям. В сечении получается окружность. Если же плоскость пройдёт «наискосок» (как показано на рисунке **5.27**, *б*), то в сечении получится уже не окружность, а эллипс.



5.27

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Назовите несколько предметов, имеющих форму шара, цилиндра, конуса.
- Проведите на поверхности мяча несколько больших окружностей. Сколько их можно провести? Можно ли провести две большие окружности так, чтобы они не пересекались?
- В сечении каких круглых тел может получиться прямоугольник? круг? треугольник? эллипс?

УПРАЖНЕНИЯ

МОДЕЛИРУЕМ

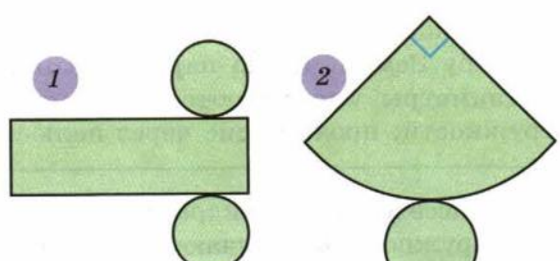
310 а) Возьмите прямоугольный лист бумаги и сверните из него боковую поверхность цилиндра. Чему равна его высота? Сверните из этого же листа цилиндр с другой высотой.
б) Вырежите из одного и того же круга два неравных сектора. Сверните каждый сектор в конус. Какой конус оказался выше: полученный из большего сектора или из меньшего?

311 а) Вылепите из пластилина цилиндр и разрежьте его так, чтобы в сечении получился круг; эллипс. Как надо разрезать цилиндр, чтобы в сечении получился прямоугольник?
б) Вылепите из пластилина конус. Разрежьте его так, чтобы в сечении получился эллипс. Как надо разрезать конус, чтобы в сечении получить треугольник? круг?

312 а) Возьмите четыре шарика для настольного тенниса. Расположите их так, чтобы каждый касался трёх других. Вершинами какого многогранника являются центры этих шаров? Найдите длины рёбер этого многогранника, если диаметр каждого шара равен 4 см.
б) Пушечные ядра сложены пирамидой в 3 яруса (рис. *5.28*). Сколько ядер в этой пирамиде?

5.28

313 Поверхности цилиндра и конуса, как и поверхность многогранника, можно развернуть на плоскость. Развёртки этих тел изображены на рисунке *5.29*. Боковая поверхность цилиндра разворачивается в прямоугольник, а боковая поверхность конуса — в *круговой сектор*. Перенесите развёртки на лист бумаги, увеличив их в 3 раза. Вырежите и склейте из них цилиндр и конус.
Указание. Не забудьте дорисовать клапаны для склеивания.



5.29

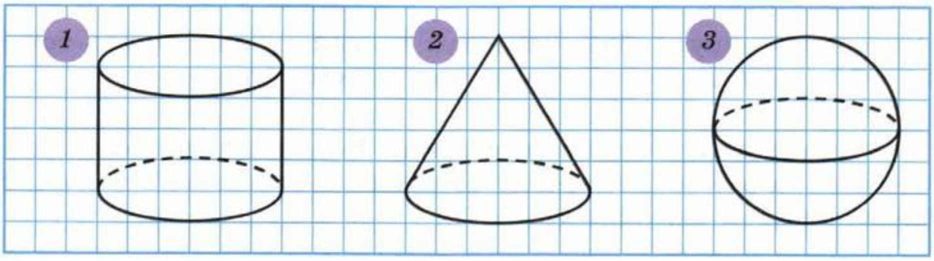
314 ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Ответьте на вопросы, сделав соответствующие рисунки. На сколько частей делится окружность одним диаметром? двумя диаметрами? тремя диаметрами?

2) Ответьте на вопросы, нарисовав соответствующие окружности мелом на мяче. На сколько частей делится сфера одной большой окружностью? двумя большими окружностями? тремя большими окружностями?
Подсказка. Будьте внимательны: в последнем случае ответ неоднозначен.

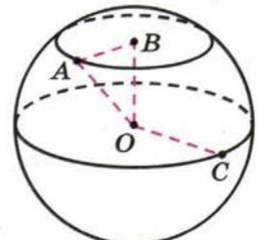
СЕЧЕНИЯ

315 Скопируйте в тетрадь изображение цилиндра, конуса, шара (рис. ***5.30***). Нанесите на изображение каждого тела какое-нибудь сечение, имеющее форму круга.



5.30

316 Диаметр шара равен 10 см. Какие из изображённых на рисунке ***5.31*** отрезков равны 5 см?

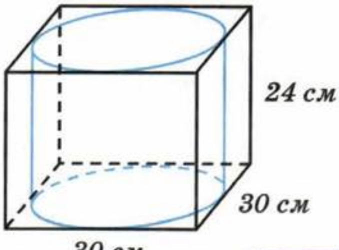


5.31

317 Плоскость, параллельная основанию конуса, рассекла его на две части. Зарисуйте ту часть, которую называют *усечённым конусом*.

КОМБИНАЦИИ ТЕЛ

318 Цилиндр помещён в параллелепипед так, что касается всех его граней (рис. ***5.32***). Чему равна высота цилиндра? Чему равен радиус основания цилиндра?



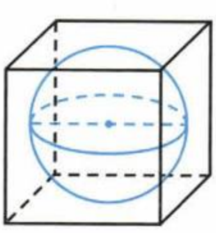
5.32

319 а) Шар поместили в куб так, что он касается всех граней куба (рис. ***5.33***). Сколько всего точек касания? Ребро куба равно 6 см. Чему равен диаметр шара?

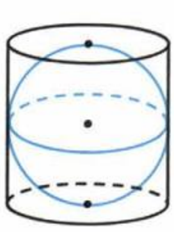
б) Можно ли поместить в куб с ребром 7 см шар радиусом 4 см?

320 Шар помещён в цилиндр так, что он касается и его боковой поверхности, и оснований (рис. ***5.34***). Радиус основания цилиндра равен 5 см. Чему равен диаметр шара? Чему равна высота цилиндра?

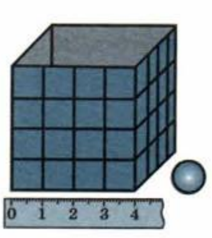
321 Одинаковые шары укладывают в коробку в форме куба, располагая их строго один под другим. Сколько шаров диаметром 1 см войдёт в коробку с ребром 4 см (рис. ***5.35***)? А шаров радиусом 1 см?



5.33



5.34



5.35

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 Назовите все случаи взаимного расположения:
а) прямой и окружности;
б) двух окружностей.

2 Начертите окружность, отметьте на ней какую-нибудь точку и постройте касательную к окружности в этой точке.

3 Две окружности касаются внешним образом. Радиус одной из них равен 4 см, а расстояние между центрами окружностей — 7 см. Найдите радиус другой окружности.

4 Радиусы двух окружностей равны 7 см и 11 см, а расстояние между их центрами — 19 см. Как расположены окружности по отношению друг к другу?

5 Постройте:
а) треугольник со сторонами, равными 3 см, 5 см и 7 см;
б) равнобедренный треугольник, основание которого равно 7 см, а боковые стороны — 4 см;
в) равносторонний треугольник со стороной 5 см.

6 Сформулируйте неравенство треугольника.

7 Можно ли построить треугольник со сторонами, равными:
а) 2 см, 4 см, 5 см;
б) 7 см, 1 см, 8 см;
в) 5 см, 5 см, 11 см;
г) 10 см, 2 см, 6 см?

8 Выполните задание.
1) Постройте равносторонний треугольник ABC со стороной 4 см.
2) Проведите окружности с центрами в вершинах треугольника и радиусом, равным 2 см.
3) Точки касания окружностей обозначьте следующим образом: точку, лежащую на стороне BC, — A_1; точку, лежащую на стороне AC, — B_1; точку, лежащую на стороне AB, — C_1.
4) Проведите лучи AA_1, BB_1, CC_1. Точку пересечения лучей обозначьте буквой O.
5) Точка O — центр двух окружностей, касающихся каждой из трёх построенных окружностей внешним и внутренним образом. Проведите эти окружности: с меньшим радиусом — от руки, с большим — с помощью циркуля.

глава 6

ОТНОШЕНИЯ И ПРОЦЕНТЫ

- ЧТО ТАКОЕ ОТНОШЕНИЕ
- ОТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИН. МАСШТАБ
- ПРОЦЕНТЫ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ
- «ГЛАВНАЯ» ЗАДАЧА НА ПРОЦЕНТЫ
- ВЫРАЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ В ПРОЦЕНТАХ

ИНТЕРЕСНО

Мир отношений широк и разнообразен. У каждого из вас свои отношения с друзьями, с родителями, с учителями. Иногда приходится даже выяснять отношения. Отношения между людьми изучает специальная наука — психология. Отношения между странами изучают экономические и политические науки. А вот математика изучает отношения чисел, отношения величин.

21 ЧТО ТАКОЕ ОТНОШЕНИЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что называют отношением
- В каком случае применяют термин «отношение»
- Как разделить величину в заданном отношении

Золотое сечение — это отношение длин отрезков, примерно равное 5 : 3. Например, если вы начертите прямоугольник со сторонами 5 см и 3 см, то соотношение его размеров даст вам представление о золотом сечении. Принято считать, что объекты, в которых «присутствует» золотое сечение, воспринимаются людьми как наиболее гармоничные, поэтому соответствующие пропорции широко применяются в искусстве, архитектуре. Особенно славится этим архитектура древности. Так, фасад древнегреческого храма Парфенона вписывается в прямоугольник, отношение сторон которого равно золотому сечению.

Сравнить между собой два числа или две величины можно двумя способами. Если надо выяснить, на сколько одно число больше (меньше) другого, вычисляют разность этих чисел. Если же надо узнать, во сколько раз одно число больше (меньше) другого или какую часть одно число составляет от другого, вычисляют частное. Оба способа сравнения постоянно используют на практике, но служат они разным целям.

ЧТО НАЗЫВАЮТ ОТНОШЕНИЕМ ДВУХ ЧИСЕЛ Рассмотрим пример. В городе Северогорске проводится лыжный забег, в котором участвуют все желающие. В этом году число участников увеличилось на 50 человек по сравнению с прошлым годом.

Это означает, что разность между числом участников этого и прошлого года равна 50. Возникает вопрос: много это или мало? Ответ на него зависит от того, сколько человек участвовало в забеге в прошлом году. Если, например, их было 25, то в этом году их стало 75, т. е. в 3 раза больше. Это довольно большой прирост. Если же их было 1000 человек, то число участников увеличилось только в $\frac{1050}{1000} = 1{,}05$ раза, т. е. осталось почти тем же.

Вообще если надо получить качественную оценку ситуации, то числа или величины сравнивают с помощью деления. В этих случаях вместо слова «частное» употребляют термин «отношение». Иными словами, *отношение двух чисел — это другое название их частного.*

Отношение двух чисел показывает, во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого.

Вернёмся к примеру о лыжном забеге. Используя термин «отношение», в первом случае можно было сказать: отношение числа участников лыжного забега этого года к числу участников прошлого года равно 3.

Так же как и в случае частного, отношением называют и значение выражения, и само выражение. Например, $\frac{75}{25}$, или 75 : 25 (читают: отношение семидесяти пяти к двадцати пяти).

Иногда отношение оставляют «невычисленным» и говорят: «Число лыжников прошлого года относится к числу лыжников этого года как 75 к 25», при этом для записи отношения используют двоеточие.

Так как $\frac{75}{25} = \frac{3}{1}$, то можно записать равенство:

$$75 : 25 = 3 : 1.$$

Если умножить или разделить оба члена отношения на одно и то же число, не равное нулю, то получится отношение, равное данному.

Рассмотрим такой пример. В результате опроса, проведённого в школе, выяснилось, что отношение числа школьников, не умеющих плавать, к общему числу учащихся школы равно $\frac{1}{5}$.

Это означает, что не умеющие плавать составляют пятую часть учащихся этой школы (умеющие плавать — $\frac{4}{5}$). Иногда говорят ещё и так: «Каждый пятый учащийся школы не умеет плавать» или «Четыре из пяти учащихся школы умеют плавать».

ДЕЛЕНИЕ В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ В жизни нам часто приходится делить ту или иную величину на части, отношение которых равно заданному отношению. В таких случаях говорят: разделить величину в данном отношении.

Пример 1. Для учащихся пятых и шестых классов школы выделили 35 билетов на новогоднюю ёлку в мэрию. В пятых классах учится 54 человека, а в шестых — 72.

Решили, что будет справедливо разделить билеты между пятыми и шестыми классами в том же отношении, в котором находится число пятиклассников к числу шестиклассников, т. е. в отношении 54 к 72. Упростим это отношение: $54 : 72 = 3 : 4$.

Таким образом, надо разделить 35 билетов в отношении $3 : 4$, т. е. разделить их на равные части так, чтобы три из этих частей отдать пятиклассникам, а четыре — шестиклассникам. Сделать это можно, решив знакомую вам задачу на части:

1) Всего имеется $3 + 4 = 7$ (частей).
2) На каждую часть приходится $35 : 7 = 5$ (билетов).
3) Пятиклассники получат $5 \cdot 3 = 15$ (билетов).
4) Шестиклассники получат $5 \cdot 4 = 20$ (билетов).

Пример 2. Учащиеся во время зимних каникул отдыхали в спортивном лагере. Число мальчиков относилось к числу девочек как $5 : 3$, причём мальчиков было на 10 больше, чем девочек. Узнаем, сколько мальчиков и сколько девочек было в лагере.

Это тоже задача на части, и решить её можно так:

1) На долю мальчиков приходится на 2 части больше, чем на долю девочек: $5 - 3 = 2$.

2) Эти 2 части составляют 10 учащихся, значит, одна часть составляет $10 : 2 = 5$ (человек).

3) Мальчики составляют 5 частей, поэтому всего их $5 \cdot 5 = 25$ (человек).

4) Девочки составляют 3 части, значит, всего их в лагере $5 \cdot 3 = 15$ (человек).

Можно найти число девочек иначе: $25 - 10 = 15$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют отношением двух чисел? Что показывает отношение двух чисел?
- Число красных карандашей относится к числу синих как $7 : 2$. Определите, во сколько раз красных карандашей больше, чем синих; какую часть синие карандаши составляют от красных.
- Упростите отношение $12 : 8$.

УПРАЖНЕНИЯ

ОТНОШЕНИЕ

322 В июне 18 дней были солнечными, а 12 — дождливыми.
а) Вычислите отношение числа солнечных дней к числу дождливых дней и обратное отношение. Объясните, что показывает каждое из этих отношений.
б) Составьте и вычислите ещё какие-нибудь отношения, используя условие задачи. Что они показывают?

323 Напишите несколько отношений, равных: а) 10; б) 0,1; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{2}$.

324 Прочитайте отношение и вычислите его:

а) $24 : 32$; б) $1{,}8 : 4{,}5$; в) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$; г) $2\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$.

325 а) Отношение числа красных шариков к числу синих равно $5 : 2$. Каких шариков больше и во сколько раз? Запишите обратное отношение. Что оно показывает?
б) Ручка в 1,5 раза дороже карандаша. Чему равно отношение стоимости ручки к стоимости карандаша? Чему равно отношение стоимости карандаша к стоимости ручки?

326 В тетради 30 чистых и 18 исписанных листов. Что показывает каждое из отношений: $30 : 18$; $18 : 30$; $30 : 48$; $18 : 48$? Замените каждое из данных отношений равным, записанным меньшими числами.

327 Из 20-литрового бидона, наполненного молоком, вылили 6 л. Какое из следующих отношений означает отношение количества вылитого молока к оставшемуся?

1) $3 : 10$ **2)** $7 : 3$ **3)** $3 : 7$ **4)** $10 : 3$

328 Замените данное отношение равным ему отношением целых чисел:

а) $0{,}5 : 1{,}5$; б) $4{,}5 : 2{,}7$; в) $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$; г) $1\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$.

Образец. Заменим отношение $2{,}5 : 1{,}5$ равным ему отношением целых чисел. Сначала избавимся от дробей, умножив оба члена отношения на 10, а затем разделим оба члена нового отношения на их общий делитель:

$$2{,}5 : 1{,}5 = 25 : 15 = 5 : 3.$$

329 Начертите какой-нибудь прямоугольник, отношение сторон которого равно:
а) $1 : 2$; б) $5 : 3$; в) $1 : 1$.

330 Начертите отрезок AB. Отметьте на нём точку C таким образом, чтобы выполнялось условие:

а) $\frac{AC}{BC} = 1$; б) $\frac{AC}{BC} < 1$; в) $\frac{AC}{BC} > 1$; г) $\frac{AC}{BC} = 2$.

331 Андрей и Борис занимаются боксом. На тренировках Андрей из 18 проведённых боёв выиграл 7, а Борис из 12 боёв выиграл 5. Чей результат лучше?

332 Прочитайте текст рубрики «В фокусе» на с. 105. Опишите аналогичным способом следующую ситуацию:

а) отношение числа финалистов к числу участников конкурса равно $\frac{1}{4}$;

б) отношение числа забитых шайб к числу бросков по воротам равно $\frac{1}{8}$.

333 Сформулируйте утверждение иначе, используя слово «отношение»:
а) каждый тридцатый школьник — рыжий;
б) каждый восьмой из пропустивших уроки — прогульщик.

ДЕЛЕНИЕ В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

334 На изучение математики в 7 классе отводится 170 уроков. Это время распределяется между алгеброй и геометрией в отношении 3 : 2. Сколько в учебном году уроков алгебры и сколько геометрии?

335 Сплав состоит из меди и цинка, массы которых относятся как 9 : 8. В сплаве 1 кг 350 г меди. Сколько в этом сплаве цинка?

336 Отношение числа мальчиков в школе к числу девочек равно 5 : 4. Какую часть от числа всех учащихся школы составляют мальчики и какую девочки?

337 У хозяина две собаки. Большая весит 9 кг, а маленькая — 3 кг. Он разделил между ними пакет с кормом в отношении, равном отношению их масс. Какая часть корма досталась маленькой собаке? Выберите верный ответ.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{1}{12}$

338 В школьном хоре число пятиклассников относится к числу шестиклассников как 5 : 8. Решите следующие задачи:
а) Сколько в хоре пятиклассников, если в нём 16 шестиклассников?
б) Сколько всего учащихся пятых и шестых классов среди участников хора, если в нём 20 пятиклассников?
в) Сколько всего учащихся пятых и шестых классов в хоре, если шестиклассников на 9 больше, чем пятиклассников?
г) На сколько больше в хоре учащихся шестых классов, чем учащихся пятых, если всего в хоре 26 пятиклассников и шестиклассников?

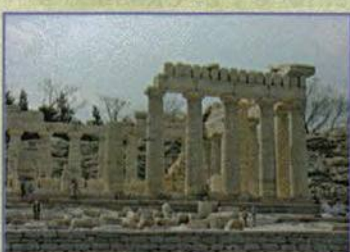
339 Учитель разложил весь имеющийся мел в две коробки в отношении 7 : 4. Когда из первой коробки израсходовали 12 кусков, то мела в коробках стало поровну. Сколько всего кусков мела было у учителя первоначально?

22 ОТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИН. МАСШТАБ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Чем различаются отношения одноимённых и разноимённых величин
- Что называют масштабом

В Японии, недалеко от Токио, есть парк, в котором представлены мировые архитектурные достопримечательности, выполненные в масштабе 1 : 25. Среди других в нём есть копия Парфенона. Это единственное строение из Греции, представленное в этом парке.



Макет Парфенона. Япония

Примером практического применения отношения величин, который известен вам из уроков природоведения, географии, является масштаб. Масштаб указывается на любой географической карте. Часто вы можете услышать, что изображение какого-либо объекта или его макет сделаны в некотором масштабе. Это означает, что размеры изображения или макета уменьшены по сравнению с самим объектом в одном и том же отношении.

ОТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИН В задачах, а также в практической деятельности часто приходится находить отношение величин. Если это одноимённые величины — длины, площади, массы и т. д., то их отношение выражается числом. При вычислении отношения в таких случаях важно следить за тем, чтобы величины были выражены в одних и тех же единицах. Так, например, отношение 10 м к 15 см равно не 10 : 15 или 2 : 3, а 200 : 3. Действительно, чтобы получить правильный результат, надо выразить эти длины в одних единицах, например в сантиметрах.

Если же находят отношение разноимённых величин, то получают новую величину. Так, отношение пути ко времени — это скорость. Если путь измерен в километрах, а время — в часах, то скорость будет выражена в километрах в час. Например: $\frac{180\text{ км}}{3\text{ ч}} = \frac{180}{3}\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60$ км/ч.

Отметим, что обозначения км/ч, м/с и т. п. приняты именно потому, что расстояние делят на время. И в этих обозначениях принято использовать косую дробную черту. Отношение стоимости товара к его количеству (массе, длине, числу штук и пр.) — это цена товара. Она тоже измеряется в аналогичных единицах: р./кг, р./м, р./шт. Но на практике такие обозначения единиц цены не употребляются. Их выражают словами: «60 р. за килограмм», «27 р. за коробку» и т. д.

ЧТО НАЗЫВАЮТ МАСШТАБОМ Любая географическая карта или план какого-либо участка земной поверхности содержат указание на использованный при их составлении масштаб. Он нужен для того, чтобы мы знали, во сколько раз размеры местности, изображённой на карте или плане, меньше её действительных размеров.

Масштабом называют отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности.

Масштаб обычно записывают в виде отношения (с помощью дробной черты или двоеточия), первый член которого равен 1, а второй — числу, показывающему, во сколько раз единица длины на карте меньше соответствующей единицы на местности. Так, на рисунке ***6.1*** вы видите фрагмент карты Зарубежной Европы, масштаб которой 1 : 35 000 000. Это означает, что 1 см на карте изображает 35 000 000 см в реальности, т. е. 350 000 м, или 350 км.

6.1

Слово «масштаб» употребляется не только в связи с картой, но и более широко — во всех случаях, когда речь идёт о копии какого-либо объекта, выполненной с уменьшением или увеличением размеров в одном и том же отношении, — о чертеже, плане, макете и др.

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Расстояние между школой и автобусной остановкой равно 50 м. На плане это расстояние равно 2 см. Найдите масштаб плана.

Решение. 1) Выразите расстояния в одних единицах. На плане: 2 см; на местности: 50 м = 5000 см.

2) Составьте отношение расстояния на плане к соответствующему расстоянию на местности и упростите его:

$$2 : 5000 = 1 : 2500.$$

Ответ: 1 : 2500.

Задача 2. Чертёж фасада дома выполнен в масштабе 1:40. Чему равна высота стен дома, если на чертеже она равна 16 см?

Решение. 1) Определите по масштабу, во сколько раз реальная высота стен больше, чем их высота на чертеже: в 40 раз.

2) Найдите реальную высоту стен и выразите её в метрах:

$$16 \cdot 40 = 640 \text{ (см)} = 6{,}4 \text{ (м)}.$$

Ответ: 6,4 м.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, как найти отношение 40 см к 25 м, и найдите его.
- Какая величина является отношением пути ко времени? В каких единицах она измеряется?
- Что называют масштабом? Масштаб карты 1 : 200 000. Объясните, что показывает это отношение.

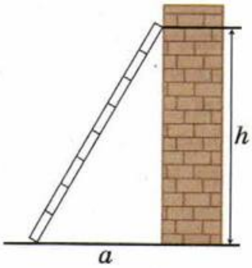
УПРАЖНЕНИЯ

ОТНОШЕНИЕ ВЕЛИЧИН

340 Найдите отношение:
а) 3 км к 759 м;
б) 300 м к 2,1 км;
в) 700 г к 1 кг;
г) 20 т к 160 кг.

341 Найдите отношение:
а) 10 мин к 10 ч;
б) 4 ч к 40 мин;
в) 1,5 ч к 20 мин;
г) 30 мин к 1 ч 15 мин.

342 На рисунке буквой h обозначено расстояние от пола до верхнего края лестницы, приставленной к стене, буквой a — расстояние от нижнего края лестницы до стены. Отношение h к a определяет крутизну лестницы. В каком случае крутизна лестницы больше: если $h = 1,8$ м и $a = 1,2$ м или если $h = 2$ м и $a = 1,5$ м?



343 Мама готовила сироп для варенья. В одну банку она налила 500 г воды и насыпала 120 г сахара, в другую — 600 г воды и 180 г сахара. В какой банке вода слаще?

344 Ответьте на вопрос задачи, составив и вычислив соответствующее отношение.
а) На принтере распечатали 100 страниц за 12,5 мин. Какова скорость печати принтера?
б) Турист прошёл 8 км за 1,6 ч. С какой скоростью шёл турист?

345 Составьте по данному условию два отношения. В каждом случае поясните смысл образовавшейся величины и укажите, в каких единицах она измеряется.
а) За 2 ч Толя прочитал 60 страниц очень интересной книги.
б) Купили 20 м электропровода, заплатив 146 р.
в) Сделав 10 шагов, Петя прошёл 4 м.
г) На принтере распечатали 30 страниц за 5 мин.

346 Скорость звука в воздухе равна примерно 300 м/с. Артиллерийский снаряд летит со скоростью 1,5 км/с. Во сколько раз скорость артиллерийского снаряда больше скорости звука? Какую часть скорости артиллерийского снаряда составляет скорость звука?

Неверно! Объясните, в чём ошибка, и запишите отношение правильно:
1) 30 кг относятся к 1 т как 30 : 1;
2) 1,2 ч относятся к 24 мин как 1 : 20;
3) 20 см относятся к 2 м как 10 : 1.

МАСШТАБ

347 Расстояние между двумя посёлками на карте равно 4 см, а расстояние между этими посёлками на местности равно 4 км. Определите масштаб карты.

348 Масштаб плана 1 : 1000. Зная это, выполните следующие задания:
1) Укажите, во сколько раз расстояние между двумя точками на плане меньше расстояния между этими точками на местности. Во сколько раз расстояние на местности больше соответствующего расстояния на плане?
2) Определите расстояние между двумя точками на местности, если на плане оно равно 1,5 см; 12 см.
3) Определите, каким должно быть расстояние между двумя точками на плане, если в действительности оно равно 0,5 км.

349 а) На карте, масштаб которой 1 : 5 000 000, расстояние между Москвой и Курском составляет 9 см. Чему равно расстояние между этими городами в действительности?
б) Возьмите карту европейской части России. Запишите в тетради масштаб этой карты. Выполните на карте необходимые измерения и определите, чему равно расстояние:
от Москвы до Санкт-Петербурга;
от Москвы до Архангельска;
от Архангельска до Петрозаводска.

350 На с. 108 вы видите фотографию макета древнегреческого храма Парфенона, выполненного в масштабе 1 : 25. Высота колонн храма на макете равна 41,7 см. Найдите реальную высоту колонн храма, выразите её в метрах, округлите ответ до десятых.

351 Стороны прямоугольника 60 см и 80 см.
1) Начертите в тетради этот прямоугольник в масштабе 1 : 20.
2) Измерьте длину диагонали прямоугольника на своём чертеже и найдите длину диагонали данного прямоугольника.

352 Размеры участка земли прямоугольной формы 30 м и 50 м. Начертите план этого участка в масштабе 1 : 500. Укажите на плане возможное расположение ворот, если они будут установлены на длинной стороне участка на расстоянии 10 м от одного из углов и их ширина будет равна 3 м.

353 Расстояние между посёлками на топографической карте, масштаб которой 1 : 10 000, равно 12 см. Увеличится или уменьшится это расстояние на карте этой же местности, но с другим масштабом, равным 1 : 8000? Каким будет оно на новой карте?

354 Высота стен дома равна 6 м. На чертеже, выполненном в некотором масштабе, она равна 25 см. Чему равна длина фасада этого дома, если на чертеже она изображается отрезком, равным 35 см?

23 ПРОЦЕНТЫ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как выразить проценты десятичной дробью
- Как выразить десятичную дробь в процентах

Как вы знаете, процент — это сотая доля величины: 1% — это одна сотая, 8% — это восемь сотых, 17% — это семнадцать сотых. Решая задачи на проценты, вы выражали процент дробью. А так как проценты означают сотые доли, то их очень легко представлять десятичными дробями и использовать десятичные дроби при выполнении процентных вычислений.

Часто употребляемые выражения:
«100% чего-либо» — означает «все»;
«0% чего-либо» — означает «ни один»;
«50% чего-либо» — означает «половина».
Например:
«100% учащихся» — значит «все учащиеся»;
«0% учащихся» — значит «ни один учащийся»;
«50% учащихся» — значит «половина учащихся».

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕНТА ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБЬЮ Рассмотрим пример, который поможет понять, как выразить проценты десятичной дробью.

Пример 1. В состав атмосферы Земли около её поверхности входят следующие газы: азот — 78%; кислород — 21%; 1% приходится на другие газы, среди которых наибольшую долю составляет аргон, и в очень небольших долях углекислый газ, водород и др.

Выразим долю каждого газа десятичной дробью. Можно рассуждать следующим образом:

Азот: 78% — это $\frac{78}{100} = 0{,}78$.

Кислород: 21% — это $\frac{21}{100} = 0{,}21$.

Другие газы: 1% — это $\frac{1}{100} = 0{,}01$.

Можно прийти к такому же результату, рассуждая несколько иначе:

1% — это одна сотая, или 0,01; значит, 78% — это $0{,}01 \cdot 78 = 0{,}78$, а 21% — это $0{,}01 \cdot 21 = 0{,}21$.

Из рассмотренного примера легко подметить, что выразить процент десятичной дробью можно коротким путём, не проводя приведённые выше рассуждения.

Чтобы выразить проценты десятичной дробью, надо число, стоящее перед знаком процента, умножить на 0,01, или, что одно и то же, разделить на 100.

Выразим десятичной дробью проценты в следующих предложениях:

1) На распродаже цена диска с компьютерной игрой составила 80% от прежней цены.

80% — это $80 : 100 = 0{,}8$, т. е. новая цена диска составила 0,8 его прежней цены.

2) Через год сумма денег на банковском счёте составила 120 % от вложенной суммы.

120 % — это 120 : 100 = 1,2, т. е. сумма на счёте увеличилась в 1,2 раза.

3) Вес годовалого ребёнка составил 300 % от его веса при рождении.

300 % — это $\frac{300}{100} = 3$, т. е. вес годовалого ребёнка в 3 раза больше, чем новорождённого.

Часто бывает удобно выражать проценты обыкновенной дробью, и некоторые из этих представлений полезно запомнить, например те, которые приведены в таблице на полях.

Процент	Десятичная дробь	Обыкновенная дробь
10 %	0,1	$\frac{1}{10}$
20 %	0,2	$\frac{1}{5}$
25 %	0,25	$\frac{1}{4}$
50 %	0,5	$\frac{1}{2}$
75 %	0,75	$\frac{3}{4}$

ВЫРАЖЕНИЕ ДРОБИ В ПРОЦЕНТАХ Итак, чтобы перейти от процентов к десятичной дроби, надо число процентов разделить на 100. Чтобы перейти от десятичной дроби к процентам, надо выполнить обратную операцию.

Проиллюстрируем это на рассмотренном примере с составом атмосферы Земли.

Пример 2. Известно, что азот составляет 0,78 смеси газов, входящих в атмосферу. Выразим эту дробь в процентах.

Умножив 0,78 на 100, получим, что 0,78 — это 78 %. Действительно,

$0{,}78 = \frac{78}{100}$, а $\frac{1}{100}$ — это 1 %, значит, $\frac{78}{100}$ — это 78 %.

Таким образом, **чтобы выразить десятичную дробь в процентах, надо эту дробь умножить на 100.**

Например:

0,47 — это 47 % (так как $0{,}47 \cdot 100 = 47$);

0,08 — это 8 % (так как $0{,}08 \cdot 100 = 8$);

0,6 — это 60 % (так как $0{,}6 \cdot 100 = 60$);

1,2 — это 120 % (так как $1{,}2 \cdot 100 = 120$).

Чтобы выразить в процентах обыкновенную дробь, надо сначала превратить её в десятичную. Например:

$\frac{2}{5} = 0{,}4$, **значит,** $\frac{2}{5}$ **— это 40 %;**

$\frac{16}{25} = 0{,}64$, **значит,** $\frac{16}{25}$ **— это 64 %;**

$\frac{2}{3} \approx 0{,}67$, **значит,** $\frac{2}{3}$ **— это примерно 67 %.**

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Как выразить проценты десятичной дробью? Выразите десятичной дробью 35 %.
- Как выразить десятичную дробь в процентах? Выразите в процентах 0,09 учащихся школы.
- Как выразить в процентах обыкновенную дробь? Выразите в процентах $\frac{3}{25}$ денежного вклада.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕНТА ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБЬЮ

355 Выразите десятичной дробью:
а) 27 %, 46 %, 79 %; б) 30 %, 90 %, 50 %; в) 3 %, 9 %, 5 %.

356 Выразите десятичной дробью, а затем обыкновенной:
25 %, 30 %, 20 %, 75 %, 80 %, 50 %, 2 %, 4 %.

357 а) Какую часть всех дней года составили дождливые дни, если их было 30 %?
б) Банк ежегодно начисляет на вклад «Семейный» 8 % от имеющейся на счёте суммы. Какую часть общей суммы вклада это составляет?

358 Жителям крупных городов задавали вопрос: «Блюда какой кухни вам нравятся?» На рисунке ***6.2*** изображена диаграмма, показывающая распределение полученных ответов. Выберите ответы, которые дали более 0,1 опрошенных. Выразите проценты, приведённые на диаграмме, в десятичных дробях.

6.2

359 Выразите десятичной дробью: 124 %, 175 %, 105 %, 250 %.

360 а) Площадь территории Норвегии составляет примерно 123 % площади Великобритании. Площадь какой страны больше и во сколько раз?
б) Численность населения Венгрии составляет 220 % от численности населения Хорватии. Население какой страны больше и во сколько раз?

ВЫРАЖЕНИЕ ДРОБИ В ПРОЦЕНТАХ

361 Выразите в процентах:
а) 0,24 учащихся школы;
б) 0,08 учащихся школы;
в) 0,75 учащихся школы;
г) 0,09 учащихся школы.

362 В школе подсчитали, какая часть её годового бюджета требуется на разные нужды. Результат приведён в таблице. Выразите эти доли в процентах. Как вы считаете, какие школьные потребности могут быть выполнены за год?

Статья расхода	Доля бюджета
Покупка учебников	0,37
Покупка компьютеров	0,8
Ремонт столов	0,08
Ремонт помещений	1,25
Покупка новой мебели	1,1

363 Выразите десятичную дробь приближённо в процентах, предварительно округлив её до сотых:
а) 0,843; б) 0,1391; в) 0,5016; г) 0,0449.

364 Выразите в процентах, округлив ответ до единиц:

а) $\frac{1}{3}$ учащихся школы; в) $\frac{1}{9}$ населения Хабаровска;

б) $\frac{1}{6}$ всех книг библиотеки; г) $\frac{1}{11}$ семейного бюджета.

365 а) Автомобильный завод через полгода после введения в строй начал ежедневно выпускать в 1,3 раза больше автомобилей, чем выпускал первоначально. Сколько процентов от первоначального выпуска составил выпуск автомобилей через полгода?
б) За год цена акций автомобильного предприятия повысилась в 2,4 раза. Сколько процентов от прошлогодней цены составила новая цена акций?

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

366 Не выполняя вычислений, определите, больше или меньше 50 % получится, если выразить в процентах дробь:

а) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{5}{12}$;

б) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{7}{12}$.

367 а) Во время распродажи все цены были снижены на 24 %. Какую часть старой цены составили новые?
б) Мальчики составляют 0,8 всех учащихся спортивной школы по борьбе. Сколько процентов всех учащихся школы составляют девочки?

368 а) В сентябре доход магазина составил 115 % от дохода в августе. На сколько процентов повысился доход в сентябре по сравнению с августом? Во сколько раз увеличился доход магазина в сентябре по сравнению с августом?
б) Стоимость коммунальных услуг в городе Северогорске в 2010 г. выросла в 2,1 раза по сравнению с их стоимостью в 2000 г. Сколько процентов составила стоимость коммунальных услуг в 2010 г. от их стоимости в 2000 г.? На сколько процентов повысилась стоимость коммунальных услуг в 2010 г. по сравнению с 2000 г.?

369 а) Во сколько раз увеличилась стоимость товара, если она выросла на 50 %? на 35 %? на 80 %? на 150 %?
б) Во сколько раз уменьшилась стоимость товара, если его уценили на 50 %? на 80 %? на 90 %? на 95 %?

24 «ГЛАВНАЯ» ЗАДАЧА НА ПРОЦЕНТЫ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как решать задачи на проценты с использованием десятичных дробей

Для решения разнообразных задач на проценты важно научиться решать одну из главных задач: находить некоторое число процентов от заданной величины. Теперь вы сможете использовать при решении таких задач десятичные дроби.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ОТ ЗАДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Задача 1. Согласно российским законам человек с каждого заработка обязан платить подоходный налог, который составляет 13 % от заработанной суммы. Какой налог должен заплатить человек с зарплаты 6500 р.?

Выразим проценты десятичной дробью:

$$13 : 100 = 0{,}13.$$

Найдём 0,13 от 6500:

$$6500 \cdot 0{,}13 = 845 \text{ (р.)}.$$

Итак, налог составит 845 р.

Иногда при нахождении процента от некоторой величины удобно пользоваться обыкновенными дробями — в тех случаях, когда, используя их, вычисления можно выполнить устно.

Пусть, например, в старших классах школы учатся 160 учащихся, причём 25 % из них занимаются в классах математического профиля. Узнаем, сколько старшеклассников учится в математических классах:

$$25\% \text{ — это } \frac{1}{4}, \text{ поэтому } 25\% \text{ от } 160 \text{ составляют } \frac{160}{4} = 40 \text{ (учащихся).}$$

Теперь при решении задач на проценты вы можете чувствовать себя свободнее и увереннее, так как имеете возможность пользоваться любым удобным вам способом: опираться на смысл понятия процента, переходить от процентов к дроби или от дроби к процентам, вычислять с десятичными дробями или, если удобно, с обыкновенными.

УВЕЛИЧЕНИЕ И УМЕНЬШЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ НА НЕСКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ

Задача 2. Родители решили накопить деньги на обучение сына в университете и внесли 20 000 р. на счёт в банке, по которому в год начисляется 12 %. Какая сумма будет на счёте через год?

Решим эту задачу разными способами.

Способ 1. Найдём 12 % от 20 000 р. и прибавим полученную сумму к первоначальному вкладу:

12% — это $0{,}12$;

$20\,000 \cdot 0{,}12 = 2400$ (р.);

$20\,000 + 2400 = 22\,400$ (р.).

Способ 2. Можно рассуждать иначе: первоначальный вклад составляет 100 %. Через год сумма на счёте увеличится на 12 % и составит 112 % от первоначального вклада. Поэтому можно сразу найти 112 % от 20 000. Так как 112 % — это 1,12, то вклад увеличится в 1,12 раза: $20\,000 \cdot 1{,}12 = 22\,400$ (р.).

Задача 3. Рубашка стоила 900 р. Во время распродажи её цена была снижена на 24 %. Какова новая цена рубашки?

Сначала найдём, на сколько рублей снизили цену рубашки во время распродажи:

$$24\,\% \text{ — это } 0{,}24; \qquad 900 \cdot 0{,}24 = 216 \text{ (р.)}.$$

Теперь вычислим новую цену рубашки:

$$900 - 216 = 684 \text{ (р.)}.$$

Эту задачу, так же как и предыдущую, можно решить и другим способом. Сделайте это самостоятельно.

Задача 4. В 1900 г. в Москве было примерно 1,2 млн жителей. К 2002 г. население Москвы увеличилось на 740 %. Найдите число жителей Москвы в 2002 г.

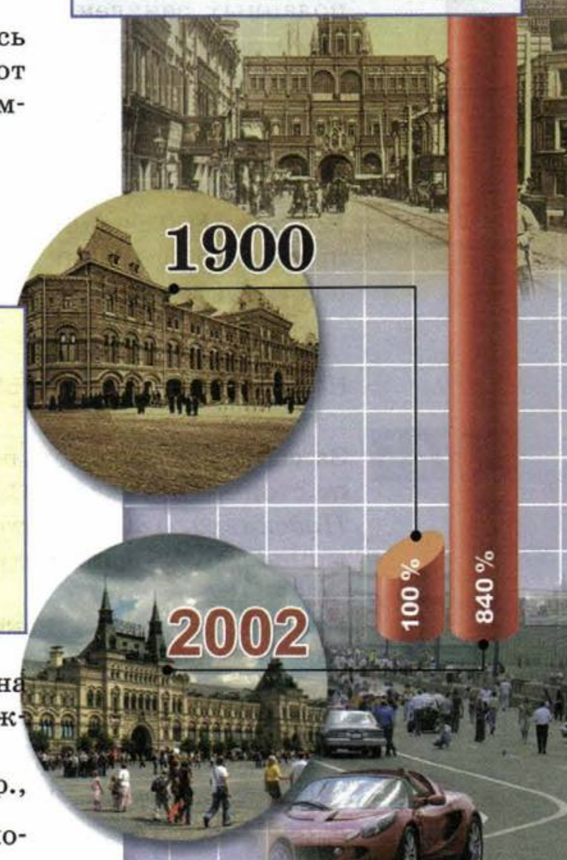
Сначала выясним, на сколько человек увеличилось население Москвы к 2002 г., т. е. найдём 740 % от 1,2 млн. Так как 740 % — это 7,4, то надо 1,2 млн умножить на 7,4:

$$1{,}2 \text{ млн} \cdot 7{,}4 = 8{,}88 \text{ млн} \approx 8{,}9 \text{ млн}.$$

Теперь найдём число москвичей в 2002 г.:

$$1{,}2 \text{ млн} + 8{,}9 \text{ млн} = 10{,}1 \text{ млн}.$$

Другой способ решения задачи 4.
1) Число жителей в 1900 г. — это 100 %, а в 2002 г. 100 % + 740 % = 840 % от числа жителей в 1900 г.
2) Численность населения к 2002 г. увеличилась в 8,4 раза и стала равной 1,2 млн · 8,4 ≈ 10,1 млн.



Понятно, что данные в задаче 4 не являются точными: ведь когда речь идёт о численности населения города, страны, абсолютная точность не требуется, да она и невозможна, так как это число ежедневно меняется. Поэтому нет смысла давать в результате больше знаков после запятой, чем в условии. Именно поэтому полученное в первом действии число 8,88 млн мы округлили до десятых.

Задача 5. Цена ковра 9990 р. На распродаже цена была снижена на 20 %. Сколько примерно рублей можно сэкономить, если купить ковёр на распродаже?

Будем рассуждать так: 9990 р. — это почти 10 000 р., 20 % — это $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ от 10 000 — это $\frac{10\,000}{5}$. Можно сэкономить примерно 2000 р.

Проведём теперь точные расчёты, найдём 20 % от 9990 р.:

$$0{,}2 \cdot 9990 = 1998 \text{ (р.)}.$$

Вы видите, что сумма, которую вы нашли прикидкой, только на 2 р. отличается от точной суммы, которую можно сэкономить. Поэтому прикидка часто даёт вам возможность составить достаточно близкое представление об ожидаемом результате.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Расскажите, как найти 14 % от 250 р.; 120 % от 300 р.
- Цена книги, которая стоила 180 р., была снижена на 20 %. Расскажите, какими способами можно найти её новую цену.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ОТ ЗАДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

370 а) Бак автомобиля вмещает 60 л бензина. Сколько литров бензина в баке, если заполнено 55 % его объёма?
б) За первую неделю было отремонтировано 32 % намеченного для ремонта участка шоссе. Сколько метров шоссе отремонтировано, если длина всего участка равна 7 км?

371 а) Средний рост девочек того же возраста, что и Маша, равен 140 см. Рост Маши составляет 105 % среднего роста. Найдите рост Маши.
б) На первый курс университета может быть принято 150 человек. Число поданных заявлений составило 220 % от числа мест. Сколько заявлений было подано в университет?

372 Начертите отрезок AB, длина которого равна 5 см. Начертите отрезки, длины которых составляют 80 %, 150 %, 200 %, 220 % длины отрезка AB.

373 В школе 800 учащихся. В шестых классах учится 10 % всех школьников, причём 45 % из них — девочки. Сколько девочек и сколько мальчиков в шестых классах?

НАХОЖДЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПО ЕЁ ПРОЦЕНТУ

374 За сборку шкафа покупатель должен заплатить 180 р., что составляет 4 % от стоимости шкафа. Сколько стоит шкаф?
Подсказка. 180 р. — это 4 %, стоимость шкафа — это 100 %. Определите, сколько рублей приходится на 1 %, а затем на 100 %.

375 Известно, что 15 % некоторой суммы денег составляют 60 р. Сколько рублей приходится на 1 %? Какова вся сумма? Ответьте на эти же вопросы, если известно, что 5 % некоторой суммы составляют 300 р.

376 В коробке лежали лампочки, 4 из них разбились. Разбитые лампочки составили 2 % от числа всех лампочек. Сколько всего лампочек было в коробке?

377 В первый час работы продавец продал 120 кг картофеля. Это составило 20 % от картофеля, имевшегося у него в начале работы. Сколько килограммов картофеля было у продавца первоначально? Выберите верный ответ.
1) 24 кг **2)** 2400 кг **3)** 60 кг **4)** 600 кг

378 Известно, что 15 % некоторого числа равны 12. Найдите:
а) 5 % этого числа;
б) 3 % этого числа;
в) 30 % этого числа;
г) 50 % этого числа;
д) 45 % этого числа;
е) 100 % этого числа.

УВЕЛИЧЕНИЕ И УМЕНЬШЕНИЕ НА НЕСКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ

379 Решите задачу разными способами.
а) Оптовая цена товара на складе равна 250 р. Магазин при продаже делает надбавку, равную 12 % от оптовой цены. Сколько стоит этот товар в магазине?
б) Во время специальной акции фруктовый сок продавался на 15 % дешевле его обычной цены. По какой цене продавался сок во время акции, если его обычная цена 40 р.?

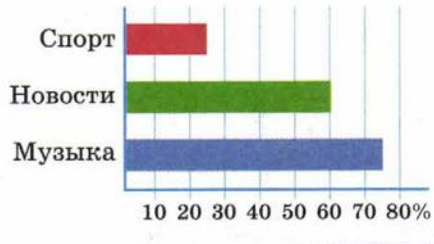
380 а) Клиент банка открыл счёт, положив на него 5000 р., с целью накопить на покупку мебели. Банк начисляет на вклад ежегодно 9 %. Сколько денег будет на счёте через год?
б) Предприниматель купил на складе товар за 1200 р. Для получения дохода он планирует продавать его на 24 % дороже. Какова будет цена товара в магазине?
в) Ткань, цена которой 280 р. за метр, уценили на 8 %. Какова новая цена метра ткани?
г) Оператор должен был за день набрать 50 страниц текста, но набрал на 14 % меньше. Сколько страниц набрал оператор?

381 Музей организует экскурсию, стоимость которой для одного человека составляет 200 р. Группам от организаций предоставляются скидки: от 3 до 10 человек — 5 %, от 11 до 20 человек — 10 %. Одна школа заказала экскурсию на 8 человек, а другая — на 15. Сколько должна заплатить за экскурсию каждая школа?

ОКРУГЛЕНИЕ И ПРИКИДКА

382 Перед Новым годом магазин снизил цены на 25 %. Сколько примерно можно сэкономить, если купить в этом магазине товар, стоимость которого до снижения цен была 799 р.? 998 р.? 1990 р.?

383 В городе был проведён опрос, в ходе которого 565 человек ответили, какие радиоканалы они предпочитают слушать. На диаграмме (рис. *6.3*) представлены результаты этого опроса. Найдите:
а) сколько человек из числа опрошенных слушает спортивные каналы;
б) на сколько больше человек предпочитает музыкальные каналы новостным.
Подсказка. Ответ округляйте до десятков.



6.3

384 Численность населения Италии составляет примерно 58 млн человек. Численность населения Индонезии на 310 % больше. Чему равна численность населения Индонезии? (Ответ округлите до десятков миллионов.)

25 ВЫРАЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ В ПРОЦЕНТАХ

ВЫ УЗНАЕТЕ

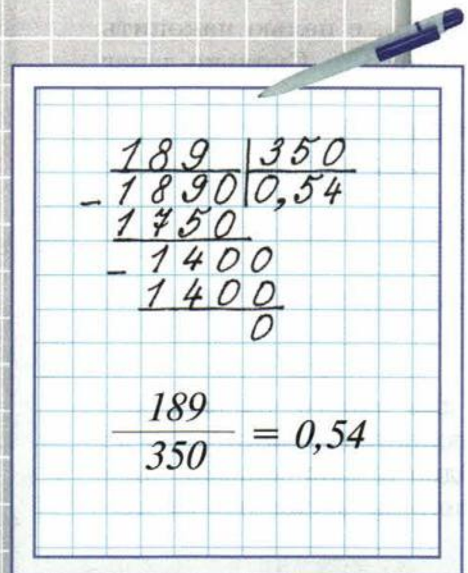
- Как найти, сколько процентов одна величина составляет от другой

Как вам известно, один из способов сравнения чисел или величин заключается в нахождении их отношения. Находя отношение двух чисел, мы узнаём, во сколько раз одно число больше другого или какую часть одно число составляет от другого. В таких случаях иногда удобно выражать полученное отношение в процентах.

СКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ ОДНО ЧИСЛО СОСТАВЛЯЕТ ОТ ДРУГОГО

Рассмотрим такой пример.

В избирательных списках посёлка Славино 350 человек. Из них в день выборов проголосовали 189 человек. Чтобы узнать, какая часть избирателей посёлка Славино приняла участие в голосовании, надо найти отношение 189 к 350. Получим $\frac{189}{350}$. Но в такой форме ответ неудобен, поэтому перейдём к десятичным дробям: $\frac{189}{350} = 0{,}54$.



Мы выяснили, что голосовать пришли 0,54 всех избирателей. Для наглядности дробь в таких случаях часто выражают в процентах: 0,54 — это 54 %. Таким образом, голосовать пришли 54 % всех избирателей.

Этот пример помогает сформулировать следующее правило:

! **Чтобы узнать, сколько процентов одно число составляет от другого, надо разделить первое число на второе и выразить полученное отношение в процентах.**

Фраза «*a* процентов от ...» является сигналом к умножению. Фраза «Сколько процентов составляет ...?» является сигналом к делению.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Рассмотрим несколько задач, в которых требуется выразить в процентах отношение двух величин.

Задача 1. На авиарейс было продано $\frac{4}{5}$ всех имеющихся билетов, остальные места остались свободными. Сколько процентов всех мест в самолёте не занято?

Решим задачу следующим образом: сначала выясним, какую часть составляют свободные места, а затем выразим эту дробь в процентах:

$$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5};\quad \frac{1}{5} = 0{,}2, \text{ т. е. } 20\,\%.$$

Ответ: 20 % всех мест не занято.

Чтобы ответить на вопрос задачи, можно рассуждать и по-другому. Попробуйте решить задачу иначе.

Задача 2. Рубашка стоила 800 р. Во время распродажи её цена была снижена на 160 р. На сколько процентов была снижена цена рубашки?

Вопрос задачи нужно понимать так: сколько процентов от первоначальной цены составляет сумма скидки? Поэтому сначала найдём, какую часть составляют 160 р. от первоначальной стоимости рубашки, т. е. найдём отношение 160 р. к 800 р., а затем выразим полученную дробь в процентах:

$$\frac{160}{800} = 0{,}2; \quad 0{,}2 \text{ — это } 20\,\%.$$

Итак, цена снижена на 20 %.

Задача 3. Один из крупнейших ледников Земли — это ледник Перито-Морено, находящийся в Аргентине. Только 50 м этого ледника возвышаются над водой, а 80 м находятся под водой. Сколько процентов от надводной части ледника составляет его подводная часть?

Сначала найдём отношение 80 м к 50 м:

$$\frac{80}{50} = 1{,}6.$$

Выразив десятичную дробь 1,6 в процентах, получим 160 %.

Подводная часть ледника составляет 160 % от его надводной части.

Задача 4. Два боксёра встречаются на ринге в поединке. Боксёр A провёл 58 боёв и победил в 50 из них, а боксёр B провёл 66 боёв и победил в 52. У кого из них процент побед выше?

Доля побед у боксёра A выражается отношением $\frac{50}{58} = \frac{25}{29}$, а у боксёра B — отношением $\frac{52}{66} = \frac{26}{33}$.

Перейдём от обыкновенных дробей к десятичным, а затем к процентам:

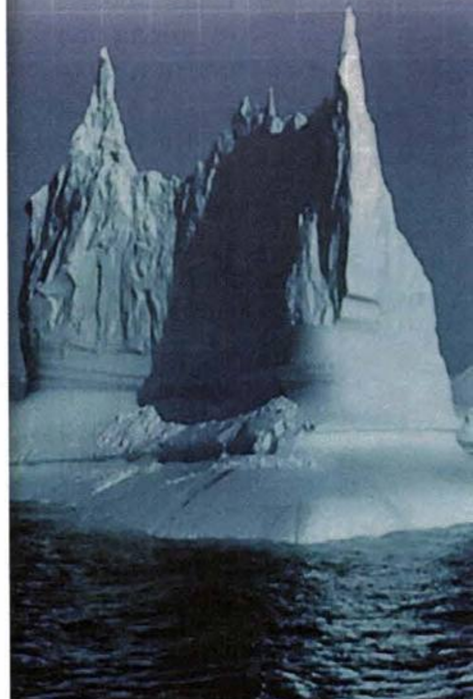
```
  25  |29              26  |33
 -250 |0,862...       -260 |0,787...
  232                  231
  -180                 -290
   174                  264
    -60                 -260
     58                  231
      2                   29
```

Таким образом, $\frac{25}{29} \approx 0{,}86$ и $\frac{26}{33} \approx 0{,}79$.

Боксёр A выиграл 86 % боёв, а боксёр B — 79 %. Значит, у боксёра A процент побед выше.

После того как найдено, сколько процентов одна величина составляет от другой, полезно проверить себя, выполнив обратное действие. Так, в задаче 2 найдём 20 % от 800 р.:

$$800 \cdot 0{,}2 = 160 \text{ (р.)}.$$



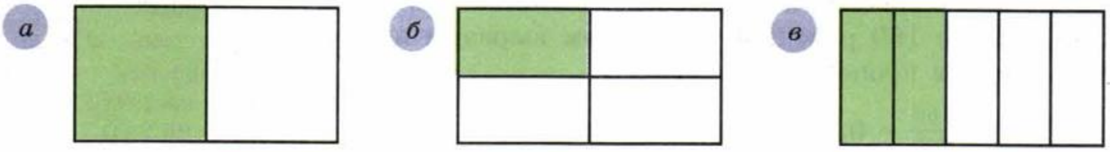
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Как узнать, сколько процентов одно число составляет от другого? Проиллюстрируйте это правило на следующем примере: найдите, сколько процентов 18 кг составляют от 200 кг.
- Как найти, сколько процентов 160 р. составляют от 80 р.?

УПРАЖНЕНИЯ

СКОЛЬКО ПРОЦЕНТОВ?

385 Сколько процентов площади прямоугольника закрашено (рис. ***6.4***)?



6.4

386 Иван бросил мяч в баскетбольное кольцо 20 раз. Определите, какую часть от числа бросков составляет число попаданий, и выразите эту часть в процентах, если он попал: а) 2 раза; б) 7 раз; в) 15 раз; г) 16 раз.

387 а) Из 500 ответов, присланных на вопрос телевикторины, правильными оказались 150. Найдите отношение числа правильных ответов к числу всех присланных ответов. Сколько процентов участников викторины ответило правильно?
б) В классе 25 учащихся, 3 из них занимаются в музыкальной школе. Найдите отношение числа учащихся, занимающихся в музыкальной школе, к числу всех учащихся класса. Сколько процентов учащихся класса занимается в музыкальной школе?

Найдите, сколько процентов одна величина составляет от другой (№ 388–390).

388 а) 150 р. от 200 р.; б) 18 р. от 60 р.; в) 7,2 т от 20 т; г) 3,6 т от 4 т; д) 20 км от 250 км; е) 4,5 км от 50 км.

389 а) 320 г от 2 кг; б) 15 см от 15 м; в) 750 м от 5 км.

390 а) 8 ч от 6,4 ч; б) 45 мин от 30 мин; в) 100 мин от 40 мин.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

391 а) Из 30 000 жителей города 6900 — дети. Какой процент всего населения составляют дети? Какой процент всего населения составляют взрослые?
б) Боксёр из 60 проведённых боёв 54 боя выиграл. Сколько процентов всех боёв боксёр проиграл?

392 а) Смешали 160 г какао и 40 г сахара. Сколько процентов всей смеси составляет какао? Сколько процентов всей смеси составляет сахар?
б) Бронза — это сплав железа с оловом и цинком. Брусок бронзы некоторой марки содержит 1,78 кг железа, 0,1 кг олова, 0,12 кг цинка. Сколько процентов всего сплава составляет каждое вещество?

393 а) Когда автобус отошёл от автобусной станции, в нём было занято $\frac{3}{5}$ всех мест. Сколько процентов всех мест автобуса было свободно?

б) Книги на русском языке составляют $\frac{11}{20}$ всех книг библиотеки, остальные — на иностранных языках. Сколько процентов всех книг библиотеки на иностранных языках?

394 а) При выборе президента школьного совета голоса между двумя кандидатами распределились в отношении 3 : 2. Какая часть школьников проголосовала за победителя? Сколько процентов голосов получил победитель?
б) Толя собирает марки на две темы: «Авиация» и «Автомобили». В его коллекции марки по темам «Авиация» и «Автомобили» распределяются в отношении 3 : 7. Сколько процентов коллекции составляют марки по каждой теме?

395 а) Акции компании «М-связь» в августе продавались по 250 р., а в сентябре их стоимость повысилась на 20 р. На сколько процентов повысилась цена акций?
б) Во время распродажи цена кресла, которое стоило 4000 р., понизилась на 600 р. На сколько процентов понизилась цена кресла?

396 а) В сентябре акции компании продавали по 600 р., а в октябре их стоимость понизилась, и акции стали продаваться по 510 р. На сколько процентов снизилась цена акций?
б) В осенние месяцы в городе Дальнегорске произошло 48 дорожно-транспортных происшествий. В зимние месяцы в связи с ухудшением погодных условий число ДТП выросло до 60. Сколько процентов от числа осенних ДТП составило число ДТП в зимние месяцы?

ОКРУГЛЕНИЕ И ПРИКИДКА

397 Перед Новым годом разные магазины объявили разное снижение цен. В каком магазине — A или B — скидки больше, если:

а) магазин A снизил цены на $\frac{1}{3}$, а магазин B — на 35 %;

б) магазин A снизил цены на $\frac{1}{6}$, а магазин B — на 15 %?

398 На первом заводе из 1000 изделий 29 оказались бракованными, а на втором из 2000 изделий бракованными оказались 42. Найдите примерный процент брака на каждом заводе, округлив результат до единиц.

399 Площадь территории Италии примерно равна 300 тыс. км^2, а Франции — 550 тыс. км^2. Найдите: а) сколько примерно процентов от площади Франции составляет площадь Италии; б) сколько примерно процентов от площади Италии составляет площадь Франции.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 а) Что называют отношением? В каких случаях обычно используется это слово?
б) Отрезок AB разделён точкой C на две части так, что $AC = 18$ см, $BC = 9$ см.
Что показывает отношение $\frac{AC}{BC}$? $\frac{BC}{AC}$? $\frac{AC}{AB}$? $\frac{AB}{BC}$? Найдите каждое из отношений.

2 В коробке находятся красные и зелёные шарики. Отношение числа красных шариков к числу зелёных равно 5 : 8. Какую часть числа зелёных шариков составляют красные? Во сколько раз зелёных шариков больше, чем красных?

3 Объясните, как решить задачу, и решите её: «Занятия в школе длятся 5 ч. Время на уроки и перемены распределяется в отношении 9 : 1. Сколько времени длятся уроки и сколько — перемены?»

4 Объясните, как найти отношение 90 мин к 2 ч, и найдите его.

5 Какая величина является отношением пути ко времени? В каких единицах будет выражена скорость, если расстояние выражено в метрах, а время — в минутах? Найдите скорость пешехода, если он прошёл 80 м за 5 мин.

6 Что называют масштабом? Масштаб карты 1 : 200 000. Объясните, что показывает это отношение. Определите, чему равно расстояние между двумя пунктами на местности, если на карте оно равно 8,5 см.

7 Как проценты выразить десятичной дробью? Выразите десятичной дробью: а) 39 %; б) 50 %; в) 6 %; г) 230 %.

8 Как десятичную дробь выразить в процентах? Выразите в процентах: а) 0,67 бюджета страны; б) 0,4 жителей страны.

9 Как обыкновенную дробь выразить в процентах?
Выразите в процентах $\frac{7}{20}$ избирателей округа.

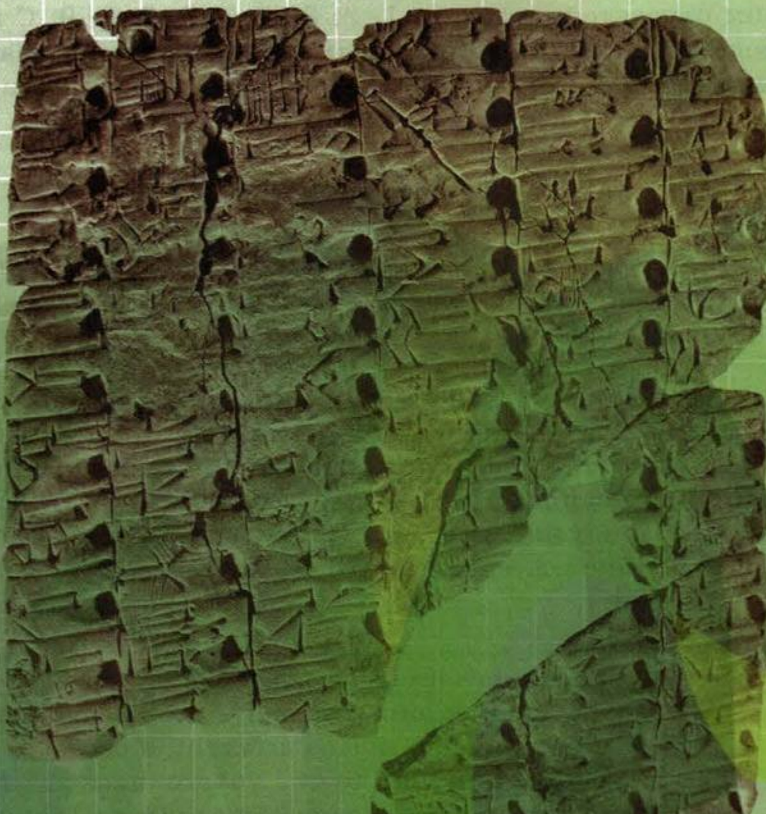
10 В начале учебного года в школе было 650 учащихся. К концу года число учащихся возросло на 6 %. Сколько учащихся стало в школе?

11 Как найти, сколько процентов одно число составляет от другого? Для выращивания рассады кабачков посадили 15 семян. Проросло 12 семян. Определите, какая часть семян проросла, и выразите её в процентах.

глава 7

ВЫРАЖЕНИЯ, ФОРМУЛЫ, УРАВНЕНИЯ

- О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ
- БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ПОДСТАНОВКИ
- СОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО ФОРМУЛАМ
- ФОРМУЛЫ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ, ПЛОЩАДИ КРУГА И ОБЪЁМА ШАРА
- ЧТО ТАКОЕ УРАВНЕНИЕ



ИНТЕРЕСНО

Чтобы понимать друг друга, обязательно нужен общий язык. Язык необходим для передачи и хранения информации. Огромна роль языка в познании мира. Один из самых удивительных языков, придуманных человечеством, — это математический язык. В этом языке, как и в других, есть свои буквы, слова и выражения. Язык математики — самый строгий и точный. Здесь недопустимы неточности и ошибки. И ещё он самый общий, самый универсальный. Его изучают во всех школах мира.

26 О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что в математическом языке играет роль букв, слов и предложений
- Некоторые правила синтаксиса математического языка

В мире существует около 5000 различных языков, на которых говорят, пишут и читают разные народы. Это так называемые естественные языки — они возникали и развивались вместе с народами.

По мере изучения математики вы постепенно знакомитесь с математическим языком. Он относится к искусственным языкам, которые создаются и развиваются вместе с той или иной наукой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ В математическом языке есть свой алфавит. Буквами в нём являются различные математические знаки. Прежде всего к ним относятся цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. С помощью цифр по специальным правилам записывают числа. Вы знакомы и с другими математическими знаками:

$$=,\ >,\ <,\ +,\ -,\ \cdot,\ :,\ \%.$$

Математическими знаками являются также и скобки.

В математическом языке используются ещё и латинские буквы. В арифметике их применяют для обозначения чисел.

Когда, например, говорят «возьмём число a», то это означает, что некоторому числу — неважно, какому именно, — дали имя a, и дальше с ним можно обращаться так, как будто оно вполне определённое. Например, записать его сумму с числом 5, получится $a + 5$. Или умножить это число на 10, получится $a \cdot 10$. Записи $a + 5$ и $a \cdot 10$ — это **математические выражения**.

$6 \cdot a = 6a$

$(a + b) \cdot 2 = 2(a + b)$

$a : b = \frac{a}{b}$

Математические выражения — слова математического языка. Их составляют из чисел, букв, знаков действий и скобок. Если в выражении нет букв, то его называют **числовым**. Выражение, содержащее буквы (одну или несколько), называют **буквенным**. Например, выражение $20 - 3 \cdot 2{,}5$ — числовое, а выражение $5 \cdot x + 2 \cdot y$ — буквенное.

Буквенные выражения записывают по определённым правилам. Так, вместо $a \cdot 6$ обычно пишут $6a$, т. е. числовой множитель записывают перед буквенным и точку (знак умножения) между ними не ставят.

Точно так же вместо $(c + 4) \cdot 10$ пишут $10(c + 4)$, вместо $a \cdot b \cdot 3$ пишут $3ab$.

В то же время никогда не пишут, например, $a7$. Если необходим именно такой порядок множителей в произведении чисел a и 7, то точку обязательно ставят, т. е. пишут $a \cdot 7$.

Частное двух чисел, обозначенных буквами, записывают обычно с помощью черты дроби, например $\frac{a}{b}$.

При записи выражений, как числовых, так и буквенных, важно уметь правильно пользоваться скобками. Так, если нужно умножить сумму чисел a и b на число c, то эту сумму заключают в скобки: $(a + b)c$. Если бы мы скобки опустили, то получили бы выражение $a + bc$, которое имеет другой смысл: это сумма числа a и произведения чисел b и c.

Заметим, что, хотя выражение $a + bc$ записывают без скобок, они в нём подразумеваются. По сути эта запись означает $a + (bc)$. Однако, как вы знаете, существует специальная договорённость, которая позволяет в данном случае скобки опустить: если в выражении нет скобок, то умножение выполняется раньше сложения.

Правила конструирования математических выражений относятся к синтаксису математического языка. Так же как и правила синтаксиса русского языка, они служат для того, чтобы математический язык понимался однозначно.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ Из математических выражений составляют математические предложения. Они выражают некоторую мысль, что-то утверждают. Вот примеры математических предложений:

1) $2 + 3 = 5$;
2) $8 < 9$;
3) 87 делится на 9;
4) a — чётное число.

Первые два из них — верные утверждения, а третье — неверное. Предложение «a — чётное число» при некоторых a верно, а при других нет. Например, если a равно 100, то оно верно, а если a равно 99, то оно неверно.

Занимаясь математикой, вы постоянно переводите предложения с русского языка на математический и наоборот. Если предложение выражает некоторое свойство или правило, выполняющееся для любых чисел, то при переводе его на математический язык без букв не обойтись.

Вспомните хорошо знакомое вам переместительное свойство сложения: при перестановке слагаемых сумма не меняется. Это свойство справедливо для любой пары чисел, поэтому мы обозначаем числа буквами a и b и пишем:

$$a + b = b + a.$$

Предложения в математическом языке короче, чем в естественном языке, именно благодаря использованию специальных математических знаков. Кроме того, они понятны людям, говорящим на разных языках.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите пример числового выражения и буквенного выражения.
- Запишите в виде буквенного выражения произведение суммы двух чисел на их разность.
- Переведите на русский язык разными способами следующее предложение: $x - y = 10$.

УПРАЖНЕНИЯ

ЗАПИСЬ И ЧТЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

400 Прочитайте выражение, используя слова «сумма», «разность», «произведение», «частное»:

а) $(12 + 9) \cdot 25$;
б) $6 \cdot 8 + 5$;
в) $4b + 7$;
г) $m : (3 - n)$;
д) $(a + b)(a - b)$;
е) $a - (b + c)$.

Подсказка. Выражение называют по действию, которое должно выполняться последним. Например, $a + bc$ — *сумма* числа a и произведения чисел b и c.

401 Запишите в виде математического выражения:
а) произведение числа 7 на сумму чисел a и b;
б) сумму числа 10 и произведения чисел x и y;
в) разность числа c и произведения чисел 4 и d;
г) разность числа m и суммы чисел 2 и n;
д) удвоенное произведение чисел a и b.

402 Пусть дано некоторое число. Обозначьте его какой-нибудь буквой и запишите в виде буквенного выражения:
а) удвоенное данное число;
б) половину этого числа;
в) две трети этого числа;
г) 10 % этого числа;
д) число, на 2 большее данного;
е) число, на 3 меньшее данного.

403 Запишите в виде буквенного выражения:
а) сумму двух чисел;
б) произведение двух чисел;
в) частное двух чисел;
г) квадрат суммы двух чисел.

404 Длина отрезка равна c м. Чему равна длина отрезка, который на 10 м длиннее данного? на 3 м короче данного? в 2 раза длиннее, чем данный? в 3 раза короче, чем данный?

405 Конфета стоит a р., а пряник стоит c р. Сколько стоят 7 конфет? 5 пряников? 6 конфет и 2 пряника? x конфет и y пряников?

406 Килограмм яблок стоит a р., а килограмм груш стоит b р. Сколько придётся заплатить, если купили 3 кг груш? 2 кг яблок и 3 кг груш? m кг яблок и n кг груш?

407 Для записи длинных выражений в математике часто используют многоточие. Например, выражение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до 50.
Запишите в виде математического выражения:
а) произведение всех натуральных чисел от 1 до 100;
б) произведение всех натуральных чисел от 1 до n;
в) сумму всех натуральных чисел от 1 до 100;
г) сумму всех натуральных чисел от 1 до n.

408 Запишите в виде буквенного выражения произведение и сумму двух последовательных натуральных чисел.

409 Запишите в виде буквенного выражения произведение пяти последовательных натуральных чисел, начиная с числа:
а) n; б) $n + 3$; в) $n - 2$.

ЗАПИСЬ И ЧТЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

410 Запишите в виде математического предложения:
а) число k больше 5;
б) число x меньше 18;
в) число a больше 0 и меньше 1;
г) квадрат числа a равен 4;
д) куб числа m меньше 1;
е) квадрат числа b больше 100.
Подставьте вместо буквы в каждое предложение такое число, чтобы получилось верное утверждение; неверное утверждение.

411 Переведите на математический язык предложение:
а) сумма числа x и числа 15 равна 31;
б) произведение чисел a и b равно 8;
в) удвоенное число m равно 11;
г) половина числа b равна 1,5;
д) разность чисел b и c больше 3;
е) произведение чисел 5 и x меньше числа y.

412 С помощью букв записаны некоторые свойства действий над числами. Дайте перевод этих математических записей на русский язык. Каждое из них проиллюстрируйте конкретными примерами:
а) $a + 0 = a$;
б) $x \cdot 1 = x$;
в) $a - a = 0$;
г) $ab = ba$;
д) $x + y = y + x$;
е) $(a + b)c = ac + bc$.

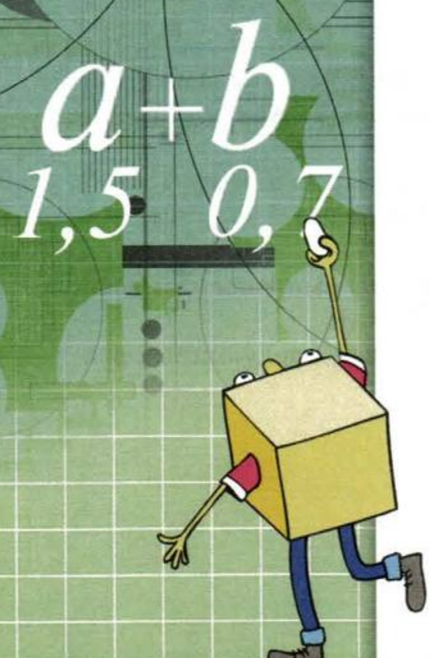
413 Предложение «5 больше 3 на 2» можно перевести на математический язык разными способами: $5 - 3 = 2$, $5 = 3 + 2$, $5 - 2 = 3$.
Переведите разными способами на математический язык следующие предложения:
а) число a больше числа b на 3;
б) число a меньше числа b на 1;
в) число 10 больше числа 5 в 2 раза;
г) число n больше числа k в 3 раза;
д) число c меньше числа 20 в 4 раза;
е) число x меньше числа y в 6 раз.

414 Примеры иллюстрируют некоторое правило. Сформулируйте это правило и запишите его с помощью букв:
а) $7 \cdot 0 = 0$, $15{,}3 \cdot 0 = 0$, $\frac{2}{5} \cdot 0 = 0$;
б) $50 : 1 = 50$, $2{,}6 : 1 = 2{,}6$, $\frac{1}{8} : 1 = \frac{1}{8}$;
в) $0 : 7 = 0$, $0 : 3{,}2 = 0$, $0 : \frac{1}{3} = 0$;
г) $12 : 12 = 1$, $0{,}7 : 0{,}7 = 1$, $\frac{3}{8} : \frac{3}{8} = 1$.

27 БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ПОДСТАНОВКИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что буквенное выражение можно превратить в числовое, заменив буквы числами
- О допустимых значениях букв в выражении



Вы уже знаете, что числовое выражение можно вычислить, т. е. найти его значение. Для этого над содержащимися в нём числами надо выполнить указанные действия. Возьмём, например, выражение

$$10 \cdot (4{,}5 - 1).$$

Так как $4{,}5 - 1 = 3{,}5$ и $10 \cdot 3{,}5 = 35$, то значение выражения $10 \cdot (4{,}5 - 1)$ равно 35. Это записывают так:

$$10 \cdot (4{,}5 - 1) = 35.$$

Кроме числовых выражений, мы имеем дело и с буквенными. Буквенное выражение можно превратить в числовое, если все содержащиеся в нём буквы заменить числами. Возможность заменять буквы числами — это, можно сказать, главное свойство буквенных выражений. Поговорим об этом подробнее.

ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ БУКВЕННОГО ВЫРАЖЕНИЯ Возьмём выражение $3x + 10$. Будем подставлять вместо буквы x различные числа, например 5, $\frac{2}{3}$, 2,5, 0, и каждый раз вычислять значение получившегося числового выражения. Результаты приведены в таблице.

x	$3x + 10$	Значение выражения
5	$3 \cdot 5 + 10$	25
$\frac{2}{3}$	$3 \cdot \frac{2}{3} + 10$	12
2,5	$3 \cdot 2{,}5 + 10$	17,5
0	$3 \cdot 0 + 10$	10

Из одного буквенного выражения $3x + 10$ можно получить сколько угодно числовых. Все они похожи тем, что для вычисления значения каждого из них нужно выполнить одни и те же действия в одном и том же порядке.

Обратите внимание на то, что в числовых выражениях, которые получались при замене буквы числом, мы восстанавливали точку — знак умножения.

Замену буквы числом называют **числовой подстановкой**, а число, которое подставляют вместо буквы, —

значением буквы. Если все содержащиеся в выражении буквы заменить числами, то получится числовое выражение. Его значение называют **значением буквенного выражения при данных значениях букв.**

Пример. Найдём значение выражения $a^2 + ab$ при $a = 0,5$ и $b = 0,3$.

Подставим вместо букв их значения и выполним указанные действия:

$$a^2 + ab = (0,5)^2 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,25 + 0,15 = 0,4.$$

Таким образом, при $a = 0,5$ и $b = 0,3$ значение выражения $a^2 + ab$ равно 0,4.

c	$\frac{10}{c}$
5	2
0,5	20
$\frac{1}{5}$	50
0	не имеет смысла

ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВ В ВЫРАЖЕНИИ Буквы, входящие в состав буквенного выражения, не всегда можно заменять какими угодно числами. Например, в выражение $\frac{10}{c}$ нельзя вместо c подставлять число 0. В самом деле, при $c = 0$ в знаменателе дроби окажется 0, а на 0, как вы знаете, делить нельзя. А в выражение $a - 10$ пока нельзя подставлять числа, меньшие 10. Дело в том, что ваши знания о числах ещё не позволяют вычитать из меньшего числа большее.

Числа, которые можно подставлять в буквенное выражение, называют **допустимыми значениями букв.** Так, для выражения $\frac{10}{c}$ допустимыми являются все числа, кроме 0. Говорят, что при $c = 0$ это выражение **не имеет смысла.**

На значения букв в выражении могут накладывать ограничения не только указанные в нём действия, но и условия рассматриваемых ситуаций.

Допустим, вы хотите купить несколько карандашей по 8 р. и ручку за 25 р. Сколько нужно заплатить за покупку?

Ответ на этот вопрос можно дать в виде буквенного выражения. Пусть вы купите n карандашей. Тогда заплатить нужно $8n + 25$ р.

Это выражение задаёт способ вычисления стоимости покупки в зависимости от значения n. Понятно, что вместо n нельзя подставлять дробные числа: ведь количество купленных карандашей должно выражаться натуральным числом.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Чем различаются записи буквенного выражения $4x^2y$ и числового, которое получается при подстановке в это выражение $x = 0,5$, $y = 1,2$? Выполните вычисления.
- Какие из чисел 0, 2, 6, 10 являются допустимыми значениями буквы a в выражении $\frac{6-a}{a}$?

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

415 Найдите значение выражения:

а) $1{,}8 + x$ при $x = 3$; 6,8; 0,02; 0;

б) $10 - c$ при $c = 6$; 5,5; 10; 0;

в) $4a$ при $a = 1$; 0,5; 0;

г) $\frac{2}{3}y$ при $y = 1$; 1,5; 9; 10.

416 Найдите значение выражения:

а) $m + 2n$ при $m = 6{,}4$, $n = 3{,}2$;

б) $3c - d$ при $c = 1{,}3$, $d = 0{,}9$;

в) $x + 2y - 3z$ при $x = 10$, $y = 25$, $z = 20$;

г) $a + b - c$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = \frac{1}{4}$.

417 Найдите значение выражения $\frac{a}{c} + 2$:

а) при $a = 12$, $c = 3$;

б) при $a = 15$, $c = 10$;

в) при $a = 1{,}5$, $c = 0{,}5$;

г) при $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$.

418 Найдите значение выражения x^2y:

а) при $x = 5$, $y = 6$;

б) при $x = \frac{1}{2}$, $y = 16$;

в) при $x = 0{,}2$, $y = 10$;

г) при $x = 100$, $y = 0{,}01$.

419 а) Найдите значение выражения $(a + b) + c$ при $a = 0{,}53$, $b = 1{,}27$, $c = 3{,}2$. Укажите значение выражения $(b + a) + c$ при этих же значениях букв.

б) Найдите значение выражения $(a + b)c$ при $a = 1{,}6$, $b = 2{,}4$, $c = 2{,}8$. Укажите значение выражения $ac + bc$ при этих же значениях a, b и c.

420 В выражение, содержащее букву a, последовательно подставили три числа. Запишите это буквенное выражение, если в результате подстановок получились следующие числовые выражения:

а) $4 \cdot 11 + 15$,
$4 \cdot 0{,}8 + 15$,
$4 \cdot \frac{1}{6} + 15$;

б) $40 - 1^2$,
$40 - 5^2$,
$40 - (0{,}5)^2$;

в) $(3 + 17) \cdot 4$,
$(3 + 1{,}6) \cdot 4$,
$(3 + \frac{4}{9}) \cdot 4$.

421 Сравните значения выражений:

а) $(1 + a)b$ и $1 + ab$ при $a = 3$ и $b = 2{,}5$;

б) $(1 - a)^2$ и $1 - a^2$ при $a = 0{,}1$;

в) $a^2 - b^2$ и $(a - b)(a + b)$ при $a = 0{,}7$ и $b = 0{,}3$;

г) $a^2 + b^2 + 2ab$ и $(a + b)^2$ при $a = 1$ и $b = 0{,}5$.

422 Какие из чисел 0, 10, 20, 25, 30 являются допустимыми значениями буквы x в выражении $\frac{25 - x}{x}$?

423 Подберите значение буквы, при котором выражение:
а) $a + 1$ принимает значение, равное 1; 100;
б) $10 - x$ принимает значение, равное 0; 1;
в) $2c$ принимает значение, равное 0; 1; 100;
г) $\frac{b}{3}$ принимает значение, равное 0; 1; 10.

424 Подберите несколько пар чисел a и b, при которых:
а) значение выражения $a - 10b$ равно 0;
б) значение выражения $3b - 2a$ равно 0.

СОСТАВЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ С БУКВЕННЫМИ ДАННЫМИ

425 Запишите ответ на вопрос задачи в виде выражения.
а) В магазин завезли c кг яблок. Их продали за 3 дня. В первый день было продано a кг, во второй — b кг. Сколько килограммов яблок было продано в третий день?
б) В вагоне электрички ехало x человек. На остановке вышло y человек, а z человек вошло. Сколько человек оказалось в вагоне после остановки?
в) У Коли было m марок. На день рождения мама подарила ему ещё n марок. А через неделю p марок он подарил другу Пете. Сколько марок осталось у Коли?

426 Придумайте задачу, на вопрос которой можно ответить, составив выражение $(a + b) - (c + d)$.

427 а) Автомобиль ехал 2 ч со скоростью a км/ч и 3 ч со скоростью b км/ч. Какое расстояние он проехал?
б) Купили x кг конфет по цене 45 р. за килограмм и y кг печенья по цене 38 р. за килограмм. Сколько заплатили за покупку?

428 а) Принтер печатает одну страницу за 4 с. Сколько страниц можно распечатать на этом принтере за t мин?
б) На фасовку одной пачки масла на конвейере уходит 6 с. Сколько пачек масла будет расфасовано на этом конвейере за t ч?

429 За 10 одинаковых тетрадей заплатили x р. Блокнот на 7 р. дороже тетради.
1) Сколько стоит блокнот?
2) Сколько стоят n блокнотов?
3) Сколько стоят m тетрадей и n блокнотов?

430 За n одинаковых тетрадей и один блокнот заплатили a р. Тетрадь стоит c р. Сколько стоит блокнот?

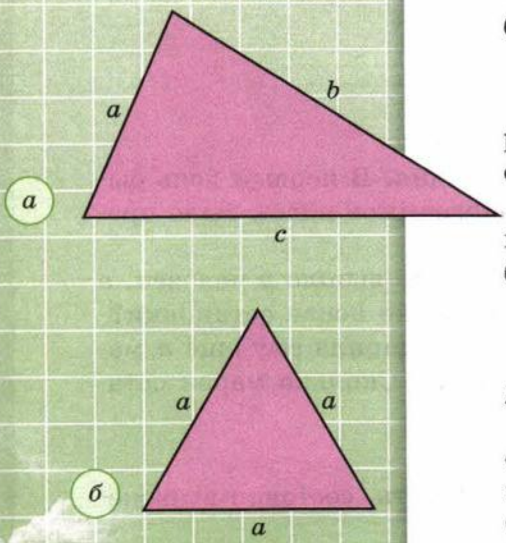
28 СОСТАВЛЕНИЕ ФОРМУЛ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО ФОРМУЛАМ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как составляют формулы для вычисления значений величин
- Формулы периметра треугольника, периметра и площади прямоугольника, объёма параллелепипеда

В математике правила часто записывают с помощью равенств, содержащих буквы. В таких случаях говорят, что правило выражено формулой. С помощью формул довольно сложные предложения, выражающие зависимость одних величин от других, могут быть записаны в удобной и компактной форме.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ



7.1

Пример 1. Пусть стороны треугольника равны 4 см, 6 см и 7 см. Найдём его периметр:

$$4 + 6 + 7 = 17 \text{ (см)}.$$

Какими бы ни были конкретные значения длин сторон треугольника, чтобы найти его периметр, их надо сложить.

Обозначим периметр треугольника буквой P, а длины его сторон, выраженные в одних и тех же единицах, буквами a, b и c (рис. ***7.1***, *а*). Тогда

$$P = a + b + c.$$

Записанное равенство — *формула периметра треугольника*.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним. Для него формула периметра примет другой вид. Пусть длина стороны равностороннего треугольника равна a (рис. ***7.1***, *б*). Тогда

$$P = a + a + a = a \cdot 3 = 3a.$$

Таким образом, если треугольник равносторонний, то

$$P = 3a.$$

7.2

Пример 2. Составим *формулу периметра и формулу площади прямоугольника.*

Чтобы найти периметр прямоугольника, можно умножить на 2 длину каждой из его смежных сторон и полученные произведения сложить. Обозначим длины смежных сторон прямоугольника буквами a и b (рис. ***7.2***). Тогда

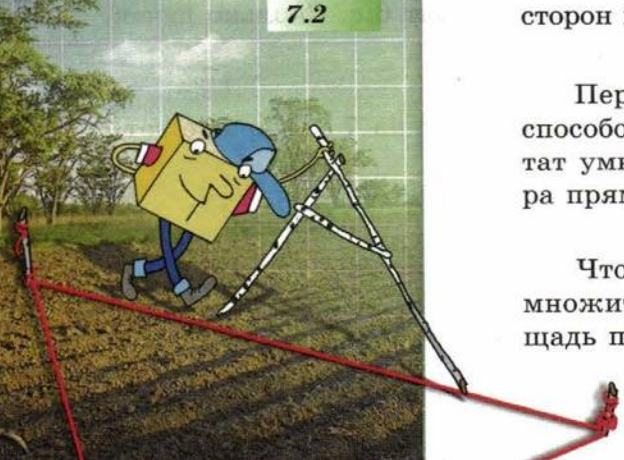
$$P = 2a + 2b.$$

Периметр прямоугольника можно найти и другим способом — сложить длины смежных сторон и результат умножить на 2. Получим другую формулу периметра прямоугольника:

$$P = 2(a + b).$$

Чтобы найти площадь прямоугольника, нужно перемножить длины его смежных сторон. Обозначим площадь прямоугольника буквой S. Тогда

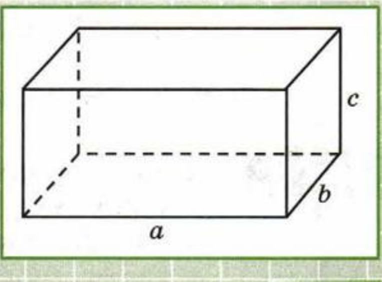
$$S = ab.$$



Пример 3. Составим *формулу объёма прямоугольного параллелепипеда* (рис. *7.3*).

Объём параллелепипеда, как известно, равен произведению трёх его измерений. Обозначим объём параллелепипеда буквой V, а длину, ширину и высоту буквами a, b и c. Получим формулу

$$V = abc.$$



7.3

ФОРМУЛА СТОИМОСТИ

Пример 4. Нам постоянно приходится подсчитывать стоимость того или иного товара. Например, 2 кг конфет по 70 р. за килограмм стоят

$$70 \cdot 2 = 140 \text{ (р.)};$$

полкилограмма яблок по 30 р. за килограмм стоят

$$30 \cdot 0,5 = 15 \text{ (р.)}.$$

Обозначим стоимость буквой C. Тогда стоимость m кг товара по c р. за килограмм можно вычислить по формуле

$$C = cm.$$

ФОРМУЛА ПУТИ

Пример 5. Известно, что пройденный путь равен произведению скорости и времени движения (при условии, что за равные промежутки времени будут пройдены одинаковые отрезки пути). Пусть, например, поезд шёл 3 ч со скоростью 90 км/ч. Тогда он прошёл путь, равный $90 \cdot 3 = 270$ (км).

Нетрудно записать и формулу, по которой находят путь при равномерном движении. Обозначим скорость движения буквой v, время движения буквой t, а пройденный путь буквой s. Тогда

$$s = vt.$$

При решении задач на движение приходится не только вычислять пройденный путь, но и по известным пути и времени движения находить скорость, а также по известным пути и скорости определять время движения.

v, t и s – первые буквы латинских слов *velocitas* (скорость), *tempus* (время), *spatium* (расстояние); именно их обычно используют при записи формул, связанных с движением.

Способы решения всех этих задач на движение опираются на одну-единственную формулу $s = vt$, в которой участвуют три величины. Если мы знаем две из них, то можем узнать и третью:

$s = vt$ (по v и t умножением находим s);

$t = \frac{s}{v}$ (по s и v делением находим t);

$v = \frac{s}{t}$ (по s и t делением находим v).

Говорят, что в первом равенстве путь s выражен через v и t, во втором время t выражено через s и v, в третьем скорость v выражена через s и t.

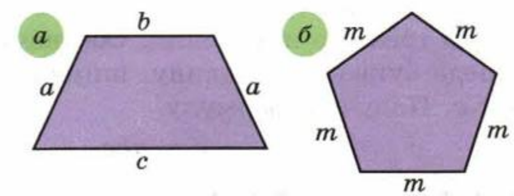
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Запишите формулу периметра равностороннего треугольника, обозначив длину его стороны буквой c.
- Из формулы площади прямоугольника $S = ab$ выразите a через S и b. Найдите сторону a, если $S = 6,5$ м^2, $b = 1,3$ м.
- Составьте формулу для примерного подсчёта числа букв на одной странице книги.

УПРАЖНЕНИЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

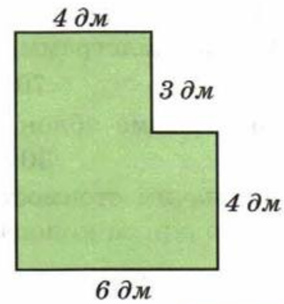
431 Составьте формулы для вычисления периметров многоугольников, изображённых на рисунке **7.4**.



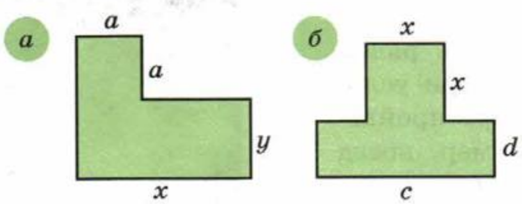
7.4

432 Начертите квадрат. Обозначьте длину его стороны какой-нибудь буквой и составьте формулы периметра и площади квадрата.

433 1) Чтобы найти площадь изображённого на рисунке **7.5** многоугольника, его можно разбить на прямоугольники или достроить до прямоугольника. Вычислите площадь этого многоугольника двумя способами.
2) Составьте формулы для вычисления площадей фигур, изображённых на рисунке **7.6**.

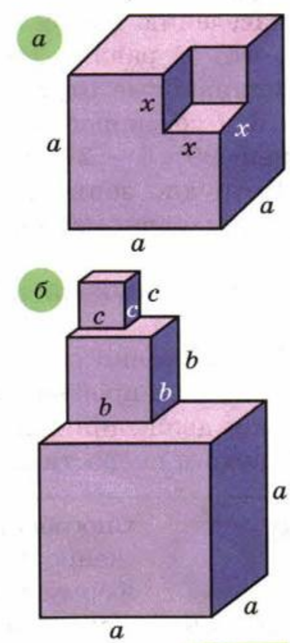


7.5



7.6

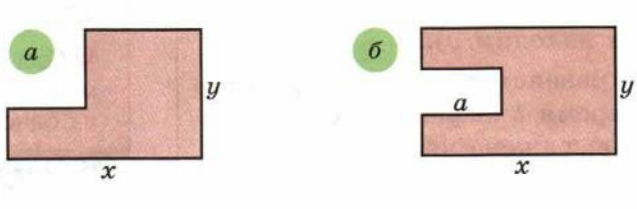
434 1) Начертите куб. Обозначьте длину его ребра какой-нибудь буквой и составьте формулу объёма куба.
2) Запишите формулы для вычисления объёмов фигур, изображённых на рисунке **7.7**.



7.7

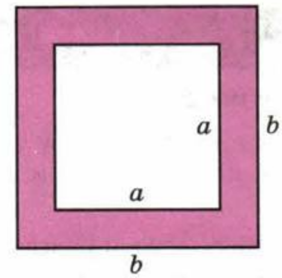
435 Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Воспользовавшись формулой периметра треугольника, выполните следующие задания:
1) Найдите периметр треугольника, если: $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 3$ см; $a = 7$ см, $b = 9$ см, $c = 11$ см; $a = b = 10$ см, $c = 3$ см.
2) Найдите третью сторону треугольника, если $P = 18$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см; $P = 24$ см, $a = 8$ см, $b = 9$ см.
3) Выразите сторону c треугольника через периметр P и стороны a и b.

436 Составьте формулу для вычисления периметра многоугольника (рис. **7.8**).



7.8

437 Площадь закрашенной рамки, изображённой на рисунке ***7.9***, вычисляется по формуле $S = b^2 - a^2$. Объясните, как получена эта формула. Найдите S, если:
а) $b = 1{,}9$ м, $a = 1{,}1$ м;
б) $b = 2{,}5$ м, $a = 1{,}5$ м.



7.9

438 а) Проволоку длиной 24 см согнули в прямоугольник. Какую длину будет иметь другая сторона этого прямоугольника, если одна из сторон равна 8 см? 4 см? 9 см?
б) Выразите сторону a прямоугольника через его периметр P и сторону b.

439 Пусть a, b, c — измерения параллелепипеда. Воспользовавшись формулой объёма параллелепипеда, выполните следующие задания:
1) Вычислите длину третьего ребра параллелепипеда, если:
$V = 48$ см^3, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
$V = 210$ см^3, $a = 6$ см, $c = 7$ см;
$V = 24$ м^3, $a = 3$ м, $b = 2$ м.
2) Выразите длину какого-либо ребра параллелепипеда через его объём и длины двух других рёбер.

ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ

440 В кинозале n рядов по k кресел в каждом ряду. Число мест в кинозале можно вычислить по формуле $N = kn$.
1) Сколько мест в кинозале, если $k = 10$, $n = 12$? $k = 33$, $n = 25$?
2) Сколько в кинозале рядов, если в каждом ряду 15 кресел, а всего в кинозале 300 мест? Выразите n через N и k.
3) Сколько кресел в каждом ряду, если всего в кинозале 176 мест и 11 рядов? Выразите k через N и n.

441 Одна шариковая ручка стоит a р.
1) Сколько стоят 2 шариковые ручки? 34 шариковые ручки? 50 шариковых ручек? m шариковых ручек?
2) Обозначьте стоимость покупки через C и запишите формулу для вычисления стоимости m ручек.
3) Выразите m через C и a; a через C и m.

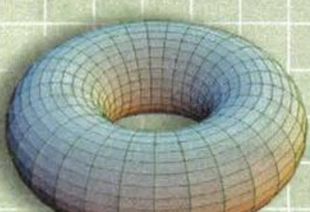
442 Каждый работающий платит подоходный налог в размере 13 % от заработка.
1) Составьте формулу для вычисления этого налога T от заработка, равного S.
2) Вычислите T при $S = 8$ тыс. р.; $S = 12{,}5$ тыс. р.

443 Магазин приобрёл телевизоры по цене c р. и продал их дороже — по цене a р.
1) Составьте формулу для вычисления прибыли P от продажи 25 телевизоров.
2) Найдите P, если $c = 5000$, $a = 7500$; $c = 3500$, $a = 4200$.

29 ФОРМУЛЫ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ, ПЛОЩАДИ КРУГА И ОБЪЁМА ШАРА

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как вычислить длину окружности, площадь круга и объём шара
- О существовании числа π

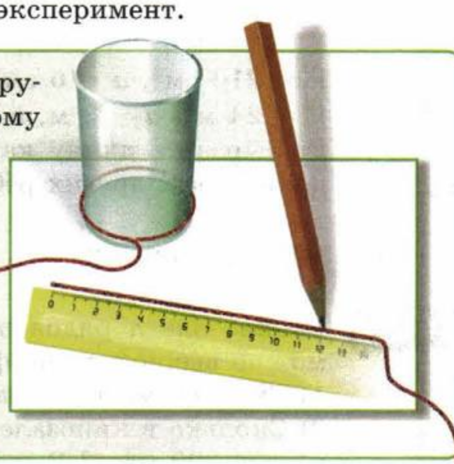


Многие закономерности, которые были связаны с измерениями длин, площадей и объёмов, необходимыми для строительства зданий, прокладывания каналов, деления земельных участков, торговли, путешествий, стали известны человеку уже очень давно. Поначалу их формулировали в виде словесных правил, а сейчас мы записываем их в виде формул.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ЧИСЛО π Чтобы получить формулу, по которой можно вычислить длину окружности, проведите такой эксперимент.

Возьмите стакан или какой-нибудь другой предмет, дно которого имеет форму круга.

1) Оберните стакан ниткой и, развернув нитку, измерьте её длину линейкой. В результате вы получите длину окружности, ограничивающей дно стакана.
2) Затем измерьте линейкой диаметр донышка.
3) Найдите отношение длины окружности к длине диаметра.
Если вы аккуратно выполните эту работу, то получите число, близкое к 3.



Повторяя эксперимент с другими предметами, вы всё время будете получать число, близкое к числу 3.

Иными словами, длина окружности примерно в 3 раза больше её диаметра.

Это связано с важным свойством окружности:

Этот замечательный факт был обнаружен ещё в Древнем Египте около 3,5 тыс. лет назад.

! Отношение длины окружности к её диаметру — величина постоянная, она не зависит от размеров окружности.

Число, выражающее отношение длины окружности к её диаметру, принято обозначать греческой буквой π — первой буквой слова «периферия» (греч. «окружность»). Общеупотребительным такое обозначение стало с XVIII в.

Необычность и удивительность этого числа состоит в том, что среди известных вам чисел — целых и дробных — его нет. Оно относится к числам новой природы, с которыми вы познакомитесь в старших классах.

В расчётах число π заменяют его приближённым значением. Вы сами экспериментальным путём могли убедиться, что $\pi \approx 3$, но это приближение достаточно грубое. Известны десятичные приближения числа π с очень большим числом десятичных знаков. Вот как, например, выглядит приближённое значение с десятью знаками после запятой: $\pi \approx 3{,}1415926535$. Но нам такая точность не нужна, и при решении задач мы будем считать, что $\pi \approx 3{,}14$.

ФОРМУЛА ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ Обозначим длину окружности буквой C, а диаметр буквой d. Так как отношение длины окружности к диаметру равно π, то можно записать: $\frac{C}{d} = \pi$. Отсюда $C = \pi d$. Это *формула длины окружности*. Если в формулу вместо d подставить $2r$, то получим другую формулу длины окружности: $C = 2\pi r$.

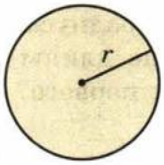
Пример 1. Найдём, какой примерно длины потребуется бордюр для ограждения клумбы, имеющей форму круга с диаметром, равным 4 м.

Подставим $d = 4$ м в формулу длины окружности $C = \pi d$ и возьмём $\pi \approx 3{,}14$, получим

$$C \approx 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56 \text{ (м)}.$$

Таким образом, потребуется не менее 12,6 м бордюра.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ КРУГА Существует и *формула площади круга*: $S = \pi r^2$, где S — площадь круга, r — радиус круга (рис. ***7.10***). В эту формулу тоже входит число π.



7.10

Пример 2. Известно, что во всех цирках мира диаметр арены равен 13 м. Найдём примерную площадь цирковой арены.

Сначала найдём радиус арены: $r = \frac{13}{2} = 6{,}5$ (м). Подставим $r = 6{,}5$ м в формулу $S = \pi r^2$ и возьмём $\pi \approx 3{,}14$. Получим $S \approx 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 42{,}25 = 132{,}665$ (м²).

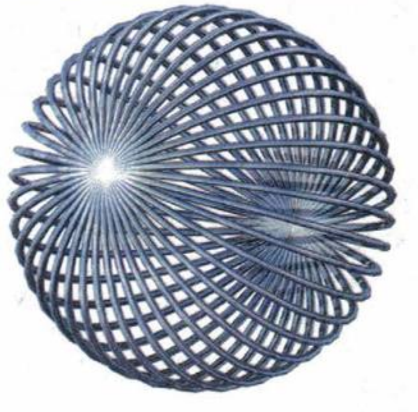
Округлим значение площади арены до единиц, получим $S \approx 133$ м².

ФОРМУЛА ОБЪЁМА ШАРА Существует и *формула объёма шара*. Она также содержит число π.

Объём шара равен $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шара (рис. ***7.11***).

7.11

На протяжении тысячелетий математики искали приближения числа π, выраженные дробями. В III в. до н.э. Архимед установил, что число π заключено в пределах от $3\frac{10}{71}$ до $3\frac{1}{7}$. Значение $3\frac{1}{7}$ до сих пор считается вполне хорошим приближением числа π для прикладных задач. В настоящее время с помощью компьютера найдено приближённое значение π, выраженное десятичной дробью, содержащей более триллиона знаков после запятой.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Расскажите, что вы узнали о числе π.
- Запишите в виде двойного неравенства оценку числа π, которую дал Архимед.
- Чему равна длина окружности, диаметр которой равен 1?

УПРАЖНЕНИЯ

$C = 2\pi r$
$S = \pi r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$\pi \approx 3,14$

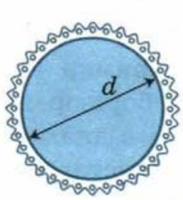
ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ФОРМУЛАМ

444 а) Вычислите длину окружности, диаметр которой равен 10 см; 2,5 м.
б) Вычислите длину окружности, радиус которой равен 7,5 см; 5 м.

445 а) Вычислите площадь круга, радиус которого равен 100 м; 20 см.
б) Вычислите объём шара, радиус которого равен 3 см; 1 м.

446 Чтобы запомнить первые цифры десятичного приближения числа π, существуют забавные поговорки, например: «Это я знаю и помню прекрасно». Запишите подряд цифры, соответствующие числу букв в каждом слове. Что у вас получилось?

447 В таблице даны диаметры d (в м) различных круглых салфеток. Сколько кружева потребуется для отделки каждой салфетки (рис. *7.12*)? Для подсчётов используйте формулу $C \approx 3d$. Ответы округляйте так, чтобы кружева наверняка хватило.



7.12

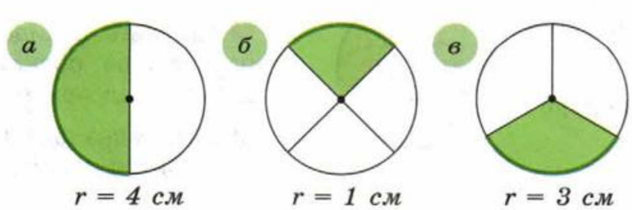
d, м	0,25	0,6	0,8	1,1	1,5
C, м					

448 Начертите окружности радиусами 2 см и 4 см. Во сколько раз длина второй окружности больше длины первой? Во сколько раз площадь второго круга больше площади первого?

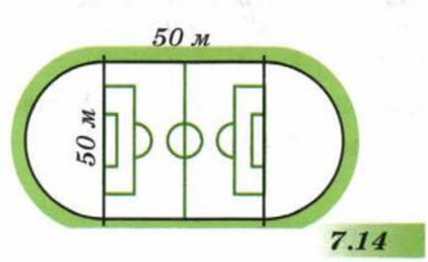
ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ОКРУЖНОСТЯМИ И ИХ ДУГАМИ

449 1) Найдите длину дуги окружности, выделенной на рисунке *7.13* жирной линией. Ответ округлите до десятых долей сантиметра.
2) Найдите площадь закрашенной части круга (рис. *7.13*). Ответ округлите до десятых долей квадратного сантиметра.

450 На рисунке *7.14* изображён школьный стадион, вокруг которого проложена беговая дорожка. Найдите длину дорожки и площадь стадиона. (Полученные числовые значения округлите до десятков.)

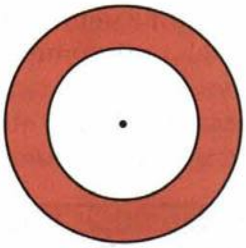


7.13

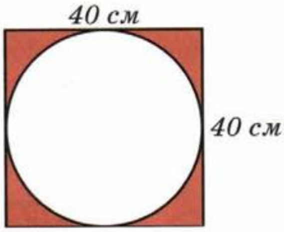


7.14

451 Кольцо ограничено двумя окружностями, радиусы которых равны 3 см и 5 см (рис. *7.15*). Чему равна площадь этого кольца?



7.15



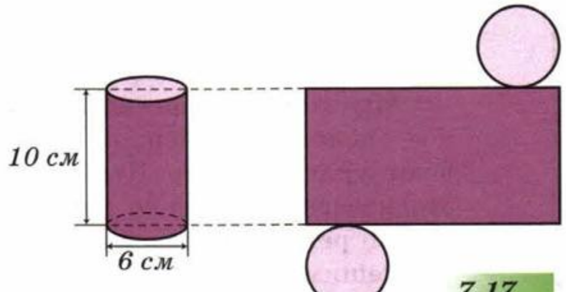
7.16

452 Из квадратного листа картона вырезали круг (рис. **7.16**). Найдите площадь обрезков.

ФОРМУЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЦИЛИНДРОМ И ШАРОМ

453 Радиус земного шара равен примерно 6400 км. Вычислите длину экватора (ответ округлите до тысяч километров).

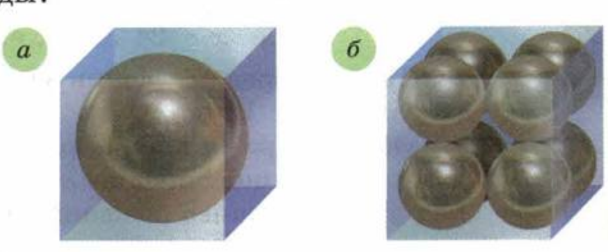
454 На рисунке *7.17* изображены цилиндр и его развёртка. Чему равны длины сторон прямоугольника, который является частью развёртки? Изготовьте развёртку этого цилиндра в натуральную величину и сверните её в цилиндр.



7.17

455 Радиус апельсина равен 4 см, а толщина кожуры равна 1 см. Объём какой части больше: съедобной или несъедобной?

456 В куб с ребром 4 ед. поместили шар, который касается всех граней куба (рис. *7.18, а*). Свободное пространство заполнили водой. В другой такой же куб поместили 8 шаров радиусом 1 ед. каждый, как показано на рисунке *7.18, б*. И этот куб тоже заполнили водой. В каком случае потребовалось больше воды?



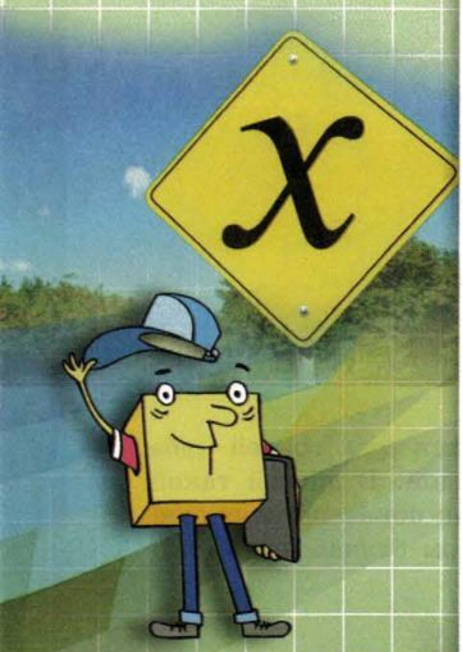
7.18

30 ЧТО ТАКОЕ УРАВНЕНИЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какие математические предложения называют уравнениями
- Что такое корень уравнения

Впервые применил букву для обозначения неизвестной величины Диофант Александрийский – древнегреческий математик, живший в III в. Но только в XVII–XVIII вв. использование букв для обозначения неизвестных величин стало общепринятым.



Вы уже знаете, что буквы необходимы для записи общих утверждений (например, свойств арифметических действий), а также формул, описывающих на математическом языке правила нахождения одних величин по известным значениям других. Теперь вы познакомитесь ещё с одним важным применением букв.

УРАВНЕНИЕ КАК СПОСОБ ПЕРЕВОДА УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК До сих пор вы решали задачи с помощью рассуждений. Но в математике есть другой способ, суть которого состоит в том, что условие задачи, заданное в словесной форме, переводится на математический язык. Основа такого перевода — введение буквы для обозначения какой-либо неизвестной величины. Поясним сказанное на примере простой задачи.

Андрей, покупая две одинаковые тетради, дал кассиру 50 р. и получил сдачу 26 р. Сколько стоит одна тетрадь?

Обозначим неизвестную стоимость тетради (в р.) буквой x. Тогда две тетради стоят $2x$ р. Стоимость двух тетрадей и сдача, полученная Андреем, вместе составляют 50 р. На математическом языке это утверждение можно записать так:

$$2x + 26 = 50.$$

Мы записали равенство, которое содержит неизвестное число, обозначенное буквой. Такие равенства называют **уравнениями**. Чтобы ответить на вопрос задачи, это неизвестное число нужно найти, или, как говорят, нужно **решить уравнение**.

Решим уравнение

$$2x + 26 = 50.$$

Будем рассуждать так.

В левой части уравнения сумма чисел $2x$ и 26. Найдём вычитанием неизвестное слагаемое $2x$:

$$2x = 50 - 26, \text{ т. е. } 2x = 24.$$

Теперь мы получили уравнение, в левой части которого произведение чисел 2 и x. Найдём делением неизвестный множитель x:

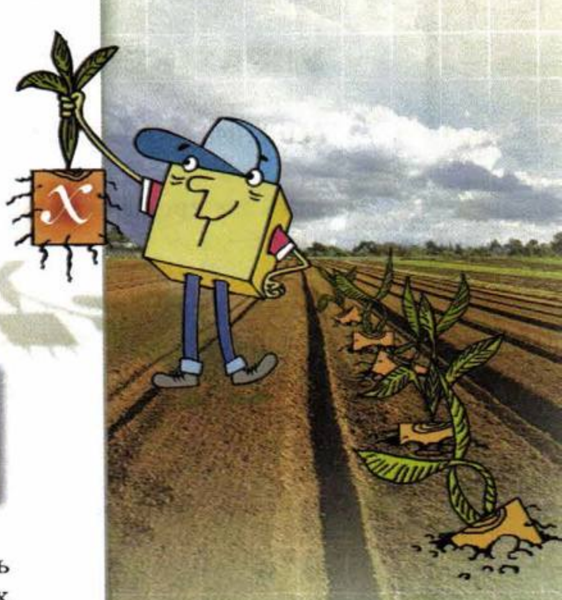
$$x = 24 : 2, \text{ т. е. } x = 12.$$

Таким образом, решив уравнение, мы узнали, что тетрадь стоит 12 р.

Обычно при решении уравнений рассуждения проводят устно, а получившиеся равенства записывают одно под другим. Запись решения может быть такой:

$$2x + 26 = 50,$$
$$2x = 50 - 26,$$
$$2x = 24,$$
$$x = 12.$$

Число 12 называют **корнем уравнения**. Если подставить его вместо x в левую часть исходного уравнения и выполнить указанные действия, то получится 50.



! Корень уравнения — это число, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ Сейчас мы будем рассматривать только простейшие уравнения, для решения которых достаточно знать свойства арифметических действий и правила, по которым находят неизвестный компонент действия.

Объясните каждый шаг в решении следующих уравнений:

1) $(x + 2x) + 2 = 8,$
$3x + 2 = 8,$
$3x = 8 - 2,$
$3x = 6,$
$x = 2;$

2) $x + (x + 5) = 10,$
$(x + x) + 5 = 10,$
$2x + 5 = 10,$
$2x = 5,$
$x = 2{,}5;$

3) $2(2x + 1) - 1 = 7,$
$2(2x + 1) = 8,$
$2x + 1 = 4,$
$2x = 3,$
$x = 1{,}5.$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ Чтобы решить задачу с помощью уравнения, нужно:
- обозначить неизвестную величину буквой;
- составить по условию задачи уравнение;
- решить составленное уравнение;
- ответить на вопрос задачи.

Задача. Чай расфасовали в 30 пачек по 150 г в каждой. Сколько пачек получится, если это же количество чая расфасовать в пачки по 250 г?

Обозначим количество пачек чая по 250 г через x. Так как оба раза речь идёт о расфасовке одного и того же количества чая, то произведения $250 \cdot x$ и $150 \cdot 30$ равны.

Получаем уравнение

$$250x = 150 \cdot 30.$$

Остаётся найти неизвестный множитель x.
Ответ: 18 пачек.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:
- Что называется корнем уравнения?
- Что значит решить уравнение?
- Опишите по шагам решение уравнения $5(x - 1) = 30$.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

457 Есть ли среди чисел 3, 4 и 5 корень уравнения:
а) $2x - 1 = 9$; б) $10 - 3x = 1$; в) $4x = 8$; г) $36 : x = 12$?

458 Решите уравнение и с помощью подстановки проверьте, правильно ли найден корень:
а) $x + 9 = 27$; б) $x - 7 = 14$; в) $60 - c = 18$; г) $2x = 76$; д) $4x = 32$; е) $5x = 30$; ж) $3x - 1 = 14$; з) $6 + 12x = 18$; и) $21 - 5x = 6$.

459 Решите уравнение и сделайте проверку:
а) $\frac{1}{2}x = 5$; б) $\frac{1}{5}y = 4$; в) $2y = 0{,}6$; г) $0{,}1x = 3$; д) $6x = 1$; е) $0{,}7y = 0$.

460 Решите уравнение:
а) $(x + 2) + x = 9$; б) $x + (7 + x) = 11$; в) $x + 2x - 5 = 40$; г) $x + (x + 4) + x = 16$; д) $(x + 5) + (x + 6) = 21$; е) $2(x - 8) = 20$.

461 Найдите корень уравнения подбором:
а) $2x = x$; б) $2x = x + 1$; в) $x + 2 = 2x$; г) $3x = 6x$.

462 Объясните, почему данное уравнение не имеет корней:
а) $x = x + 2$; б) $x + 3 = x + 6$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

463 Найдите задуманное число. Для этого запишите условие задачи с помощью уравнения и решите его.
а) Андрей задумал число, вычел из него 10 и получил 15,6.
б) Таня задумала число, прибавила к нему 1,7 и получила 20,7.
в) Николай задумал число, умножил его на 2,5 и получил 10.
г) Олег задумал число, нашёл $\frac{1}{4}$ этого числа и получил 5.

Решите задачу, составив уравнение (№ 464–468).

464 а) К концу года цена журнала увеличилась в 2 раза, а через полгода она поднялась ещё на 6 р., и после этого журнал стал стоить 30 р. Какова была первоначальная цена журнала?
б) К имеющимся конфетам добавили 19 конфет и все конфеты разделили поровну между 8 детьми. Каждый получил по 7 конфет. Сколько конфет было сначала?

465 а) Хозяева садового участка выделили под огород 200 м^2. Под картофель отвели площадь, в 3 раза большую, чем под морковь. Какую площадь они выделили под картофель и какую — под морковь?
б) Отрезок длиной 36 см разделили на две части так, что одна часть оказалась в 2 раза больше другой. Чему равна длина каждой части?
Подсказка. Обозначьте буквой меньшую величину.

466 а) Два числа в сумме составляют 106. Одно из этих чисел на 20 больше другого. Найдите эти числа.
б) Два числа в сумме составляют 59. Одно из них на 15 меньше другого. Найдите эти числа.
Подсказка. Обозначьте буквой меньшее из чисел.

467 а) В двух коробках 27 карандашей, причём в одной из них на 5 карандашей больше, чем в другой. Сколько карандашей в каждой коробке?
б) Туристы прошли за 2 дня 48 км, причём в первый день на 10 км меньше, чем во второй. Сколько километров прошли туристы в первый день?

468 а) В баке и ведре 24 л воды. В ведре воды в 3 раза меньше, чем в баке. Сколько литров воды в ведре?
б) В компот положили яблоки и сливы, всего 18 штук. Слив положили в 2 раза больше, чем яблок. Сколько яблок положили в компот?

469 Запишите условие каждой задачи с помощью уравнения.
а) Таня задумала число, умножила его на 15 и результат вычла из 80. Получила 20. Какое число задумала Таня?
б) Саша задумал число, прибавил к нему 15 и результат умножил на 10. Получил 200. Какое число задумал Саша?

470 Составьте задачу для своего соседа по парте. Для этого задумайте какое-нибудь число, умножьте его на 5, к результату прибавьте 100. Какое число вы получили? Теперь запишите свою задачу. Она должна начинаться так: «Я задумал число, умножил его на...»

471 Запишите условие каждой задачи с помощью уравнения.
а) Ученик задумал число, умножил его на 2, из результата вычел 15, полученный ответ разделил на 10 и получил 0. Найдите задуманное число.
б) Ученик задумал число, прибавил к нему 7, эту сумму умножил на 3, из результата вычел 15 и получил 30. Найдите задуманное число.
в) Ученик задумал число, вычел из него 1, результат умножил на 5, к произведению прибавил 10 и получил 15. Найдите задуманное число.

472 Составьте уравнение по условию задачи.
а) Олег в 3 раза старше Андрея. Сколько лет каждому мальчику, если Олег на 8 лет старше Андрея?
б) Саша старше Серёжи на 4 года. Через год им вместе будет 20 лет. Сколько лет каждому?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 1) Какие знаки, используемые в математическом языке, вам известны?
2) Запишите каждое из выражений
$5 \cdot a$, $2 \cdot x \cdot y$, $10 - (a \cdot c)$, $3 + a : b$
с соблюдением правил записи буквенных выражений.

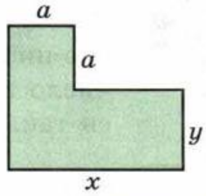
2 1) Запишите в буквенном виде свойство нуля при сложении и свойство единицы при умножении.
2) Запишите на математическом языке разными способами предложение: «Число a на 10 больше числа b».

3 Найдите значение буквенного выражения:
а) $10a + 2{,}5$ при $a = 0{,}3$;
б) $\frac{1}{3}ab$ при $a = 0{,}5$, $b = 0{,}6$;
в) $2x^2 - 10$ при $x = 2{,}5$.

4 1) Составьте выражение для ответа на вопрос задачи: «Одноклассники подарили Маше на день рождения a гвоздик. Она подарила b гвоздик маме и c гвоздик бабушке. Сколько гвоздик у неё осталось?»
2) Подберите какие-нибудь допустимые значения букв a, b и c в этой задаче и вычислите результат.

5 1) Запишите формулу периметра прямоугольника (длины сторон обозначьте буквами a и b).
2) Запишите формулу площади прямоугольника.
3) Вычислите периметр и площадь прямоугольника, если $a = 15$ см, $b = 100$ см.

6 Запишите формулу для вычисления площади фигуры, изображённой на рисунке ***7.19***.



7.19

7 1) Запишите формулы длины окружности и площади круга.
2) Что вы знаете о числе π?
3) Найдите длину окружности, радиус которой равен 10 см.

8 Составьте уравнение по условию задачи: «Коля задумал число, прибавил к нему 7, результат умножил на 2 и из полученного произведения вычел 10. В результате получил 20. Какое число задумал Коля?»

9 1) Что называется корнем уравнения?
2) Проверьте, является ли корнем уравнения $10 - 6x = 5$ число 0,5.

10 Решите уравнение $(x + 1) + x = 7$, объясняя каждый шаг решения.

глава 8

СИММЕТРИЯ

- ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ
- ОСЬ СИММЕТРИИ ФИГУРЫ
- ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

ИНТЕРЕСНО

Тадж-Махал – мавзолей, находящийся в г. Агре (Индия). Построен он в 1653 г. по приказу правителя империи Великих Моголов Шах-Джахана в память о любимой жене – красавице Мумтаз-Махал. Этот памятник – гимн любви и красоте. Строили его больше 20 лет около 20 тыс. рабочих.

По углам мавзолея поднимаются четыре изящных минарета. С левой стороны от усыпальницы находится мечеть из красного песчаника, справа – точная её копия. Весь комплекс имеет осевую симметрию. Усыпальница имеет центральную симметрию относительно гробницы Мумтаз-Махал. Единственным нарушением этой симметрии является гробница Шах-Джахана, которую там соорудили после его смерти.

31 ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ

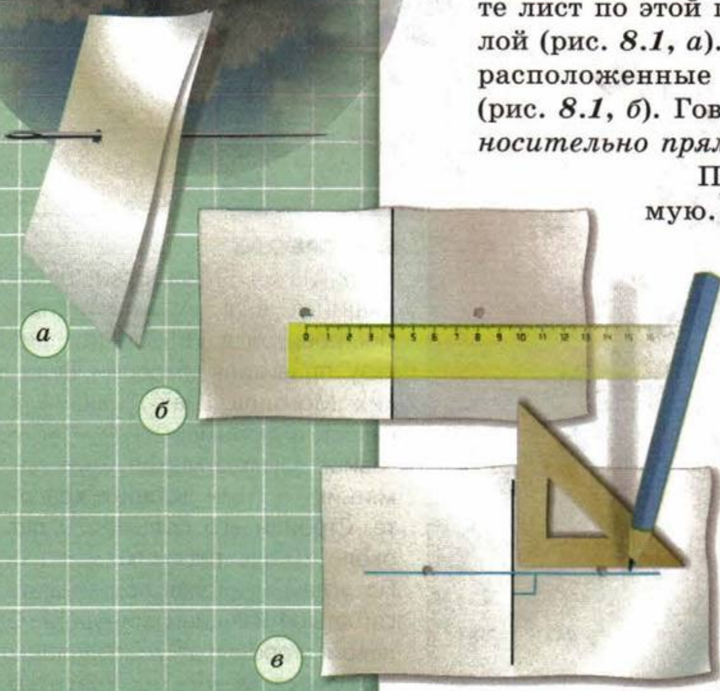
- Как построить фигуру, симметричную относительно прямой
- Какую симметрию называют зеркальной

«Симметрия» — слово греческого происхождения. Оно, как и слово «гармония», означает «соразмерность», «наличие определённого порядка, закономерности в расположении частей». Творцом симметрии является сама природа. Одни из самых первых проявлений симметрии, отмеченных человеком, — это отражение в глади водоёма и симметрия человеческого тела. Позднее люди стали использовать симметрию в архитектуре, предметах быта, орнаментах.

В математике рассматриваются различные виды симметрии. Познакомимся сначала с осевой симметрией.

ТОЧКА, СИММЕТРИЧНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ Возьмите лист бумаги. Проведите на нём прямую и перегните лист по этой прямой. Проткните сложенный лист иглой (рис. *8.1, а*). Развернув лист, вы увидите две точки, расположенные по разные стороны от этой прямой (рис. *8.1, б*). Говорят, что эти *точки симметричны относительно прямой* — линии сгиба.

Проведите через полученные точки прямую. С помощью инструментов вы можете убедиться, что эта прямая перпендикулярна линии сгиба (рис. *8.1, в*), а точки находятся от неё на одинаковом расстоянии (рис. *8.1, б*). Это — важное свойство симметричных точек. С его помощью можно строить точки, симметричные относительно некоторой прямой, и без перегибания листа бумаги.



8.1

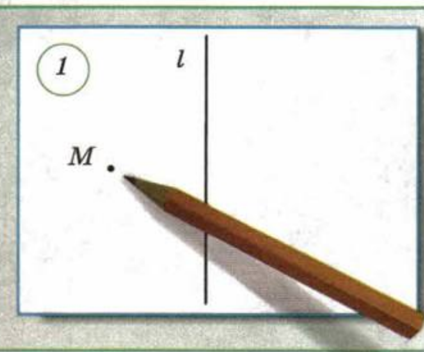
Пусть даны прямая l и точка M (рис. 1). Постройте точку, симметричную точке M относительно прямой l.

Для этого:

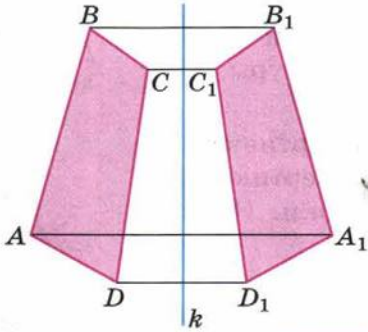
1) проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой l (рис. 2);

2) отметьте на ней точку K, расположенную на таком же расстоянии от прямой l, что и точка M (рис. 3).

Точка K симметрична точке M относительно прямой l.



СИММЕТРИЯ И РАВЕНСТВО Рассмотрите рисунок **8.2**: четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ симметричны относительно прямой k. Симметричные вершины четырёхугольников обозначены одной и той же буквой, но с добавлением индекса — цифры, поставленной внизу. Обратите внимание: называя четырёхугольник $ABCD$, вы «обходите» его по часовой стрелке, а симметричный ему четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ против часовой стрелки. Таким образом, *осевая симметрия меняет направление обхода на противоположное.*

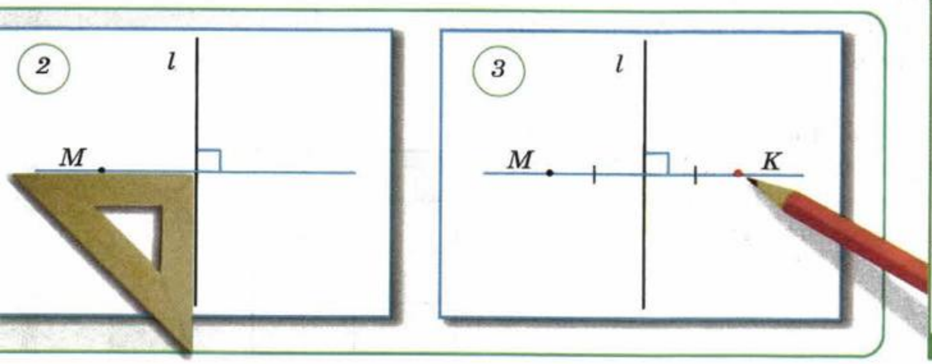


8.2

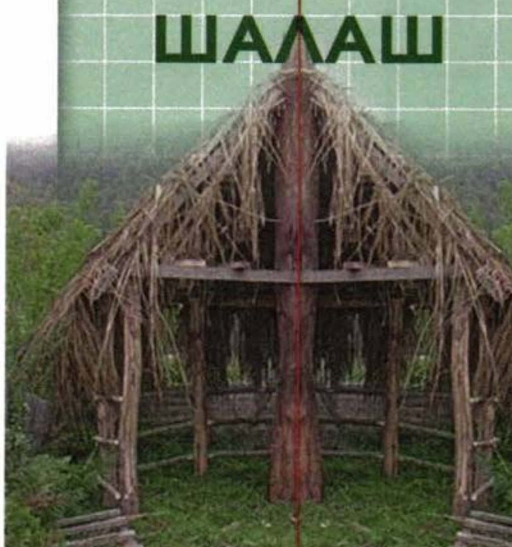
Если перегнуть рисунок **8.2** по прямой k, то четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ совпадут. Иными словами, эти четырёхугольники равны. Вообще *если фигуры симметричны, то они равны.*

ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ В пространстве аналогом осевой симметрии является симметрия относительно плоскости — *зеркальная симметрия.* Отражение в воде — пример зеркальной симметрии в природе. С этой же симметрией мы постоянно встречаемся, глядя на себя в зеркало.

Зеркальная симметрия, как и осевая, меняет ориентацию предмета. Если вы, стоя перед зеркалом, закружитесь по часовой стрелке, ваше отражение будет кружиться против часовой стрелки. Обратите внимание ещё на одну особенность: всё то, что вы делаете правой рукой, ваше отражение делает левой и наоборот.



Зеркальную симметрию организмов, которая выражается в том, что тело делится на правую и левую половины, биологи называют билатеральной. Ею обладают черви, членистоногие, позвоночные, а также некоторые органы растений.



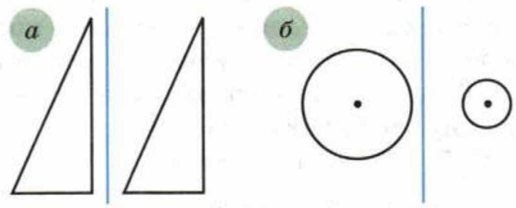
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Пользуясь рисунком **8.2**, расскажите, как построить многоугольник, симметричный данному многоугольнику относительно прямой.
- Как построить окружность, симметричную данной относительно прямой?
- Приведите примеры объектов, обладающих зеркальной симметрией.

УПРАЖНЕНИЯ

ИЩЕМ СИММЕТРИЮ

Подсказка. Выполняя задания 473–476, вы можете проверить себя, воспользовавшись зеркалом.



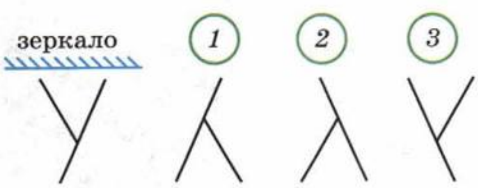
8.3

473 Выясните, симметричны ли изображённые на рисунке ***8.3*** фигуры.

474 Художник перерисовал картинку симметрично относительно вертикальной прямой, но сделал ошибки. Найдите эти ошибки (рис. ***8.4***).

8.4

475 Как выглядит зеркальное отражение буквы *У* (рис. ***8.5***)?

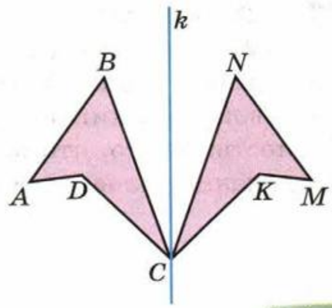


8.5

8.6

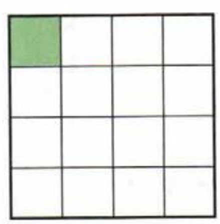
476 Какие буквы латинского алфавита получаются при зеркальном отражении букв русского алфавита на рисунке ***8.6***?

477 На рисунке ***8.7*** изображены два четырёхугольника, симметричные относительно прямой k. Какая точка симметрична точке A? точке N? точке C? Какой отрезок симметричен отрезку AD? отрезку DB? отрезку CN? Какой угол симметричен углу CNM? углу BAD? углу BCD?



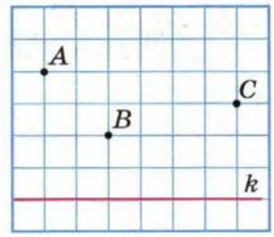
8.7

478 Квадрат разделён на 16 маленьких квадратов, один из которых окрашен (рис. ***8.8***). Будем считать, что краска не засыхает. Какое число перегибаний нужно сделать, чтобы окрасить весь квадрат?



8.8

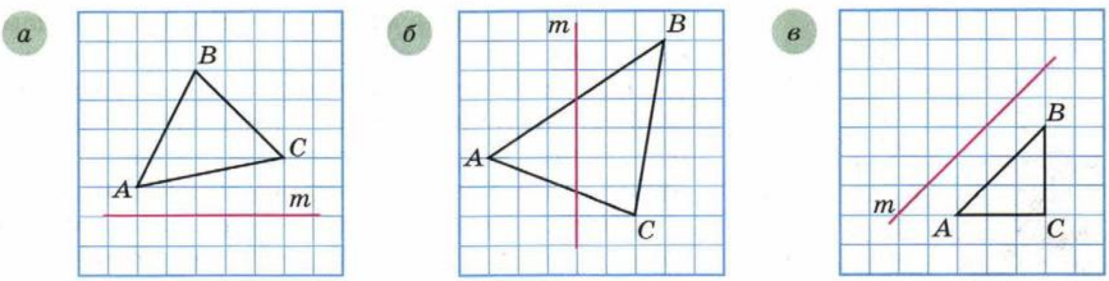
ПОСТРОЕНИЕ ФИГУР, СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ



8.9

479 Перенесите рисунок ***8.9*** в тетрадь и постройте точки, симметричные точкам A, B и C относительно прямой k.

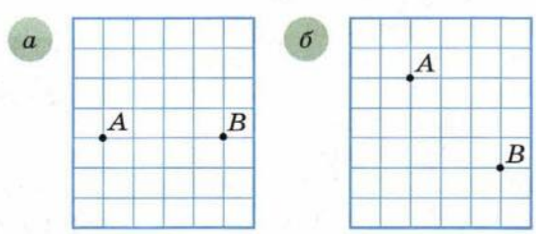
480 Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой m (рис. ***8.10***).



8.10

481 На нелинованной бумаге проведите произвольную прямую m.
а) Начертите отрезок, не пересекающий прямую m, и постройте отрезок, симметричный ему относительно прямой m.
б) Начертите отрезок, пересекающий прямую m, и постройте отрезок, симметричный ему относительно прямой m.
в) Начертите ломаную из двух звеньев, одна из вершин которой лежит на прямой m. Постройте ломаную, симметричную ей относительно прямой m.
г) Начертите четырёхугольник, одна из сторон которого лежит на прямой m, и постройте симметричный ему четырёхугольник относительно прямой m.

482 Начертите окружность и постройте симметричную ей окружность относительно прямой, которая:
а) не пересекает окружность;
б) пересекает окружность, но не проходит через её центр;
в) проходит через центр окружности;
г) является касательной к окружности.



8.11

483 Постройте прямую l, относительно которой точки A и B симметричны (рис. ***8.11***).

484 а) Начертите в тетради параллельные прямые k и l. Постройте прямую, симметричную прямой k относительно прямой l.
б) Начертите в тетради пересекающиеся прямые k и l (не являющиеся перпендикулярными). Постройте прямую, симметричную прямой l относительно прямой k.

32 ОСЬ СИММЕТРИИ ФИГУРЫ

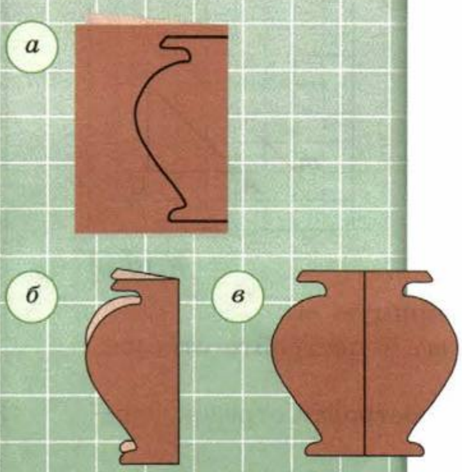
ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какую фигуру называют симметричной
- Сколько осей симметрии у прямоугольника и окружности
- О симметрии круглых тел и многогранников

Мы рассмотрели случай, когда две фигуры симметричны относительно некоторой прямой. Но прямая может пройти и через саму фигуру.

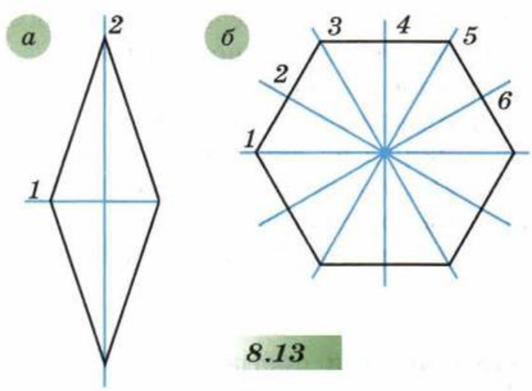
СИММЕТРИЧНАЯ ФИГУРА Говорят, что фигура симметрична относительно некоторой прямой, если при перегибании фигуры по этой прямой её части совпадают. Получить симметричную фигуру очень просто.

Возьмём лист бумаги и сложим его пополам. Нарисуем на нём какую-нибудь линию с концами на сгибе листа, как показано на рисунке ***8.12***, *а*, разрежем лист по этой линии (рис. ***8.12***, *б*) и развернём вырезанную фигуру. Фигура, которую мы получили (рис. ***8.12***, *в*), симметрична. Линия сгиба — это **ось симметрии фигуры.**

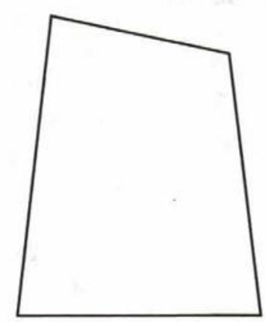


8.12

Фигура может иметь и не одну ось симметрии (рис. ***8.13***). С другой стороны, далеко не у каждой фигуры есть ось симметрии. Например, у многоугольника, изображённого на рисунке ***8.14***, её нет.



8.13

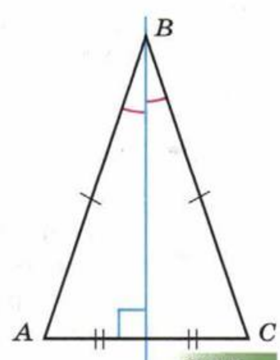


8.14

Когда через трёхмерное существо проходят две или более плоскости симметрии, биологи говорят о радиальной симметрии. Эти плоскости пересекаются по прямой. Если животное будет поворачиваться вокруг этой прямой на определённый градус, то оно снова будет входить в исходный контур.

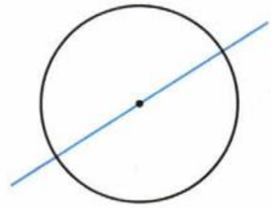
ПРЯМОУГОЛЬНИК, РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК, ОКРУЖНОСТЬ Многие известные вам фигуры симметричны. Например, у прямоугольника две оси симметрии.

Есть ось симметрии и у равнобедренного треугольника. Если вы перегнёте его так, чтобы совпали вершины при основании, то линия сгиба и будет его осью симметрии (рис. ***8.15***). Ось симметрии разбивает равнобедренный треугольник на две равные части. Она проходит через середину основания, перпендикулярна ему и делит противолежащий основанию угол пополам.

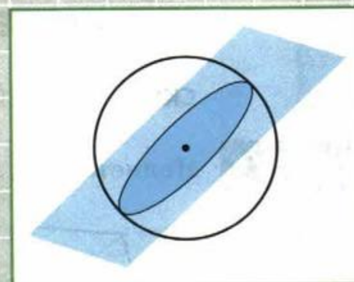


8.15

Окружность, а также ограниченный ею круг можно отнести к «самым симметричным» фигурам на плоскости. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии (рис. ***8.16***).

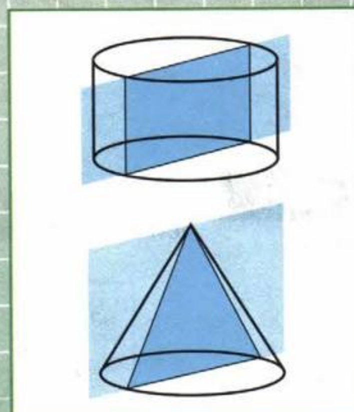


8.16



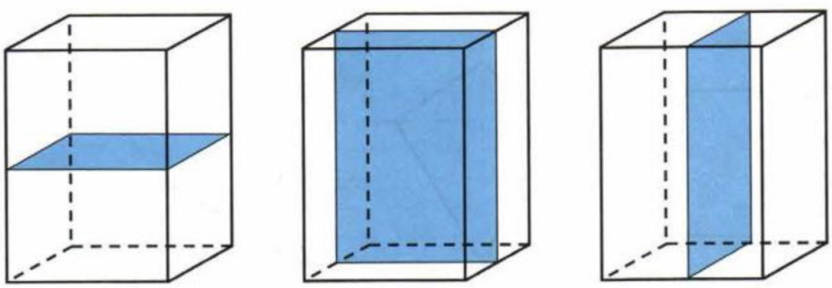
8.17

СИММЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ В пространстве сходным свойством обладает шар — он симметричен относительно любой плоскости, рассекающей его по большой окружности (рис. ***8.17***). Но в пространстве есть и другие тела, имеющие бесконечно много плоскостей симметрии. Из уже известных вам тел это цилиндр и конус (рис. ***8.18***).



8.18

Симметричными могут быть и многогранники. Например, у параллелепипеда, имеющего различные длину, ширину и высоту, три плоскости симметрии (рис. ***8.19***).



8.19

Несмотря на всеобщий характер симметрии окружающего мира, в природе мы не встречаем примеров безукоризненной симметрии. Например, нетрудно указать плоскость, относительно которой человеческое тело можно считать симметричным. Но столь же легко указать и отклонения от полной симметрии. Именно эти небольшие отклонения от неё — родинка, волосы, расчёсанные на косой пробор, или какая-нибудь деталь в одежде, нарушающая симметрию, — делают облик человека *асимметричным*.

Симметрия и асимметрия тесно «соседствуют» друг с другом. Например, в начале шахматной партии расстановка чёрных фигур является зеркальным отражением расстановки белых фигур. Однако расположение фигур одного цвета асимметрично из-за позиций короля и ферзя.

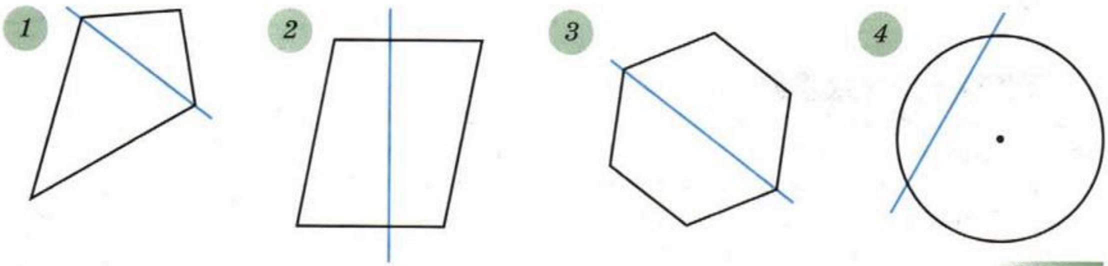
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Начертите многоугольник, у которого: а) нет осей симметрии; б) одна ось симметрии; в) две оси симметрии.
- Является ли диагональ осью симметрии прямоугольника?
- Сколько плоскостей симметрии у куба?
- Какая фигура может получиться в сечении, если плоскостью симметрии рассечь: а) параллелепипед; б) цилиндр; в) конус?
- В сечении какого многогранника плоскостью симметрии можно получить треугольник?

УПРАЖНЕНИЯ

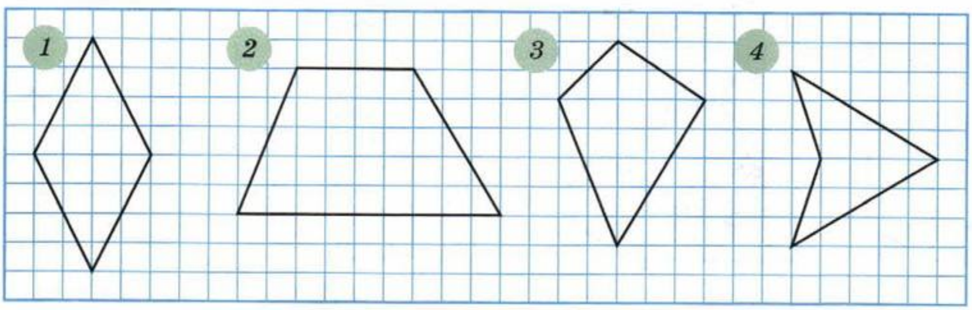
СКОЛЬКО ОСЕЙ СИММЕТРИИ?

485 Является ли проведённая прямая осью симметрии фигуры (рис. ***8.20***)?



8.20

486 Среди фигур, изображённых на рисунке ***8.21***, найдите фигуры, имеющие оси симметрии. Перерисуйте их в тетрадь и проведите оси симметрии.



8.21

487 Какие из букв русского алфавита на рисунке ***8.22*** имеют одну ось симметрии? две оси симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р
С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

8.22

СИММЕТРИЯ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

488 Прямая OP — ось симметрии треугольника KPM (рис. ***8.23***). Назовите все равные элементы треугольников KOP и POM. Каков вид треугольников KPM, KOP и POM?

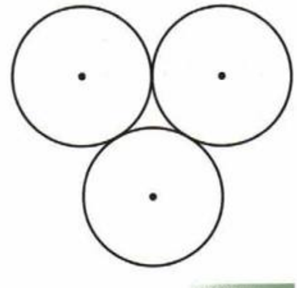
8.23

489 Начертите равнобедренный треугольник со сторонами 3 см, 5 см и 5 см. Проведите ось симметрии. Отметьте равные отрезки и равные углы.

490 Сколько осей симметрии у равностороннего треугольника? Начертите в тетради равносторонний треугольник и проведите все его оси симметрии.

491 Сколько осей симметрии имеет фигура, состоящая из трёх окружностей одинакового радиуса (рис. ***8.24***)? Постройте эту фигуру и проведите все её оси симметрии.

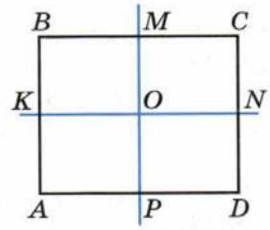
492 Перегибая лист бумаги, постройте равнобедренный треугольник.



8.24

СИММЕТРИЯ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ

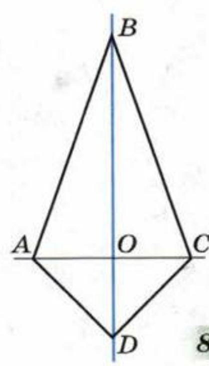
493 а) Возьмите прямоугольный лист бумаги и найдите все оси симметрии этого прямоугольника путём перегибания. Начертите в тетради прямоугольник и проведите все его оси симметрии.
б) У квадрата четыре оси симметрии. Найдите их с помощью перегибания. Начертите в тетради квадрат и проведите все его оси симметрии.



8.25

494 Прямые MP и KN — оси симметрии прямоугольника $ABCD$ (рис. ***8.25***), $KN = 6$ см, $MP = 4$ см. Найдите:
а) периметр прямоугольника $ABCD$;
б) периметр прямоугольника $KBMO$;
в) длину ломаной $AKNC$.

495 Прямая BD перпендикулярна отрезку AC и делит его пополам (рис. ***8.26***), $AB = 5$ см, $AD = 3{,}5$ см, $AO = 3$ см. Найдите периметр:
а) четырёхугольника $ABCD$; б) треугольника ABC.

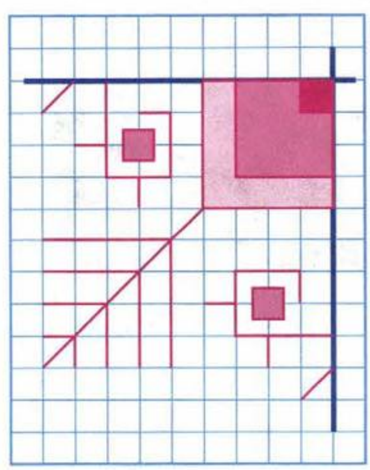


8.26

496 Начертите отрезок AB. Проведите через его середину прямую, перпендикулярную ему. Отметьте на этой прямой точки C и D так, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был симметричен относительно прямой AB. Сколько всего осей симметрии у этого четырёхугольника? При каком расположении точек C и D у четырёхугольника будет четыре оси симметрии?

497 На кальке отметьте точки A и B. Перегибая её, постройте квадрат со стороной AB.

498 На рисунке ***8.27*** изображена часть узора чувашской национальной вышивки и проведены две его оси симметрии. Воспроизведите рисунок в тетради и восстановите узор.



8.27

33 ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

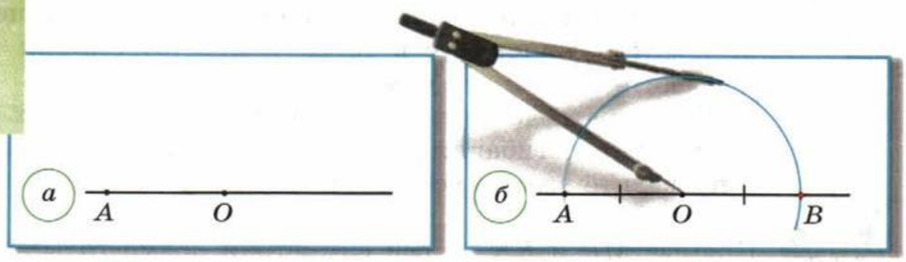
ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как построить фигуру, симметричную относительно точки
- Какие фигуры имеют центр симметрии

Ещё одним видом симметрии является центральная симметрия.

СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ Отметим на листе бумаги точки O и A (рис. **8.28**, *а*). Будем поворачивать с помощью циркуля точку A вокруг точки O (для этого поставим ножку циркуля в точку O). След, который оставляет точка A при повороте, — это дуга окружности (рис. **8.28**, *б*). При повороте на 180° точка A переходит в диаметрально противоположную ей точку B. Точки A и B называют *симметричными относительно точки O*.

Разные виды симметрии могут встретиться на шахматной доске даже в расположении фигур в партии. Какие виды симметрии можно заметить на этих позициях?



8.28

Заметьте: если точки A и B симметричны относительно некоторой точки O, то точка O является серединой отрезка AB.

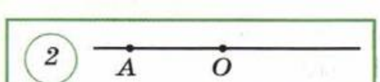
На этом свойстве основан способ построения центрально-симметричных точек.

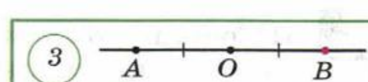
Постройте точку B, симметричную точке A относительно точки O (рис. 1). Для этого:

1) проведите прямую OA (рис. 2);

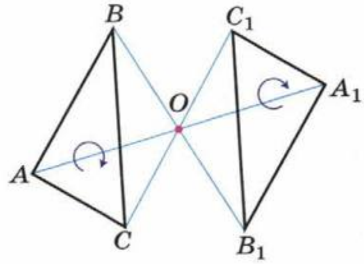
2) по другую сторону от точки O отложите отрезок, равный отрезку OA (рис. 3).

Точка B симметрична точке A относительно точки O.





Из рисунка ***8.29*** понятно, как построить треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно точки O: достаточно построить точки, симметричные его вершинам.

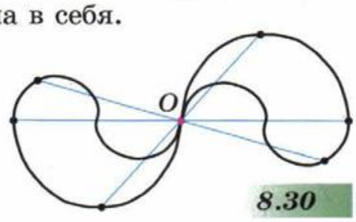


8.29

ЦЕНТР СИММЕТРИИ ФИГУРЫ

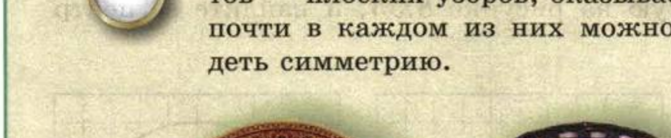
Вы уже знаете, что существуют фигуры, которые имеют ось симметрии, а некоторые — и не одну. Но фигура может иметь и **центр симметрии.** Точка является центром симметрии, если при повороте вокруг этой точки на 180° фигура переходит сама в себя.

Рассмотрим фигуру на рисунке ***8.30***. Точка O — её центр симметрии. Чтобы убедиться в этом, наложите на рисунок кальку и прикрепите её в точке O булавкой. Перенесите фигуру на кальку и поверните её на 180°. Фигура на кальке совместится с фигурой на бумаге.



8.30

Вы уже встречались с *центрально-симметричными фигурами* (рис. ***8.31***). Это прежде всего окружность, а также эллипс. Центр симметрии имеет и прямоугольник: это точка пересечения его диагоналей.



8.31

Несмотря на всё многообразие орнаментов — плоских узоров, оказывается, что почти в каждом из них можно разглядеть симметрию.

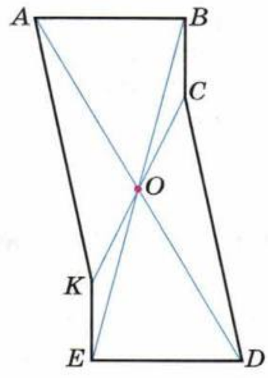
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- В каком случае точки A и B можно назвать симметричными относительно точки O?
- Отметьте на нелинованной бумаге точки O, A и B. Постройте точки, симметричные точкам A и B относительно точки O.
- Изменяет ли центральная симметрия ориентацию фигуры (см. рис. ***8.29***)?
- Убедитесь, используя кальку, в том, что точка пересечения диагоналей прямоугольника — это его центр симметрии.
- Может ли фигура иметь и центр симметрии, и ось симметрии?

УПРАЖНЕНИЯ

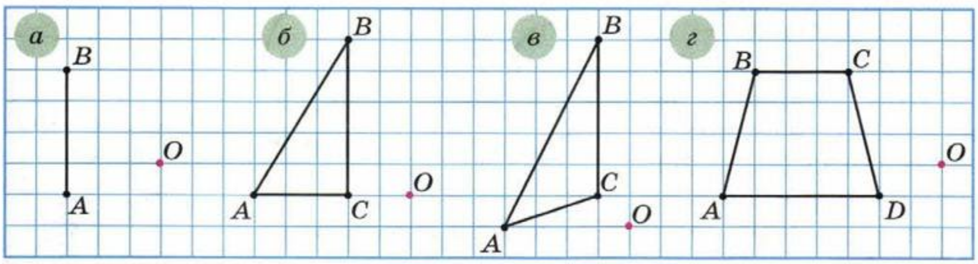
ПОСТРОЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

499 Точка O — центр симметрии шестиугольника $ABCDEK$ (рис. **8.32**). Назовите точки, симметричные точкам A, B, C и K относительно точки O. Какая фигура симметрична относительно точки O отрезку AK? отрезку AO? отрезку BC? треугольнику EOD? четырёхугольнику $ABCD$? четырёхугольнику $ABCO$?



8.32

500 Скопируйте рисунок **8.33** в тетрадь и постройте фигуру, симметричную данной относительно точки O.



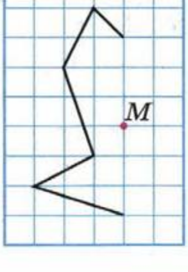
8.33

501 На нелинованной бумаге начертите произвольный треугольник и постройте симметричный ему относительно одной из вершин.

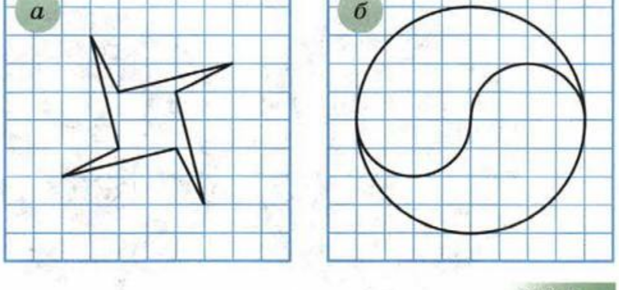
502 Начертите в тетради прямоугольник и постройте его центр симметрии. На сторонах прямоугольника возьмите какие-нибудь три точки и постройте симметричные им относительно центра симметрии.

503 На рисунке **8.34** изображена часть фигуры, центром симметрии которой является точка M. Начертите эту фигуру в тетради.

504 Скопируйте фигуру, изображённую на рисунке **8.35**, и найдите её центр симметрии.

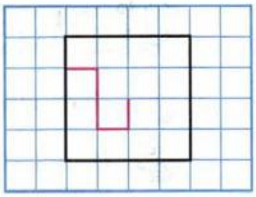


8.34



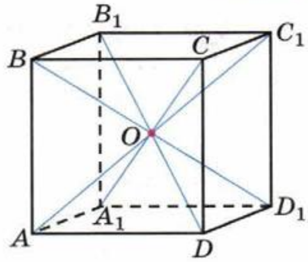
8.35

505 На рисунке *8.36* изображены квадрат 4×4 и часть ломаной линии, проходящей по сторонам клеток. Продолжите линию так, чтобы она разделила квадрат на две равные части. Придумайте другую ломаную, которая делила бы квадрат 4×4 на две равные части.



8.36

506 Центр куба — это точка пересечения его диагоналей (рис. *8.37*). Назовите вершины куба, симметричные относительно его центра.

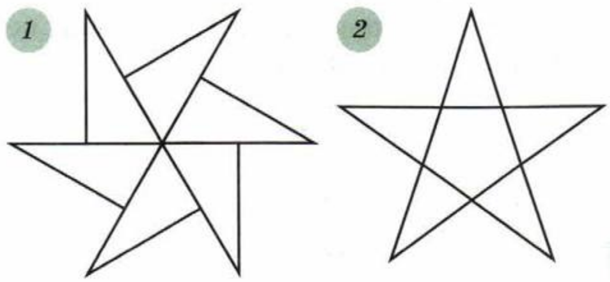


8.37

И ЦЕНТР СИММЕТРИИ, И ОСЬ СИММЕТРИИ

507 Какая из фигур, изображённых на рисунке *8.38*, имеет центр симметрии? оси симметрии?

508 Какие из букв латинского алфавита, изображённых на рисунке *8.39*, имеют и центр симметрии, и ось симметрии?



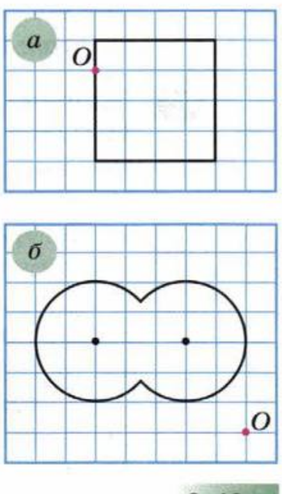
8.38

ABCDEFG
HIJKLM
NOPQRST
UVWXYZ

8.39

509 Прямоугольник разрежьте по одной из его диагоналей. Из двух получившихся треугольников сложите различные фигуры, имеющие: а) ось симметрии; б) центр симметрии. Зарисуйте их в тетради.

510 Начертите фигуру, которая имеет:
а) и центр симметрии, и ось симметрии;
б) центр симметрии, но не имеет оси симметрии;
в) ось симметрии, но не имеет центра симметрии.



8.40

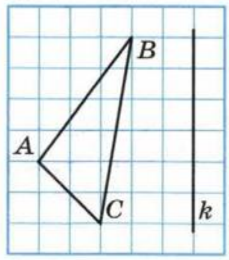
511 Нарисуйте в тетради «линзу», образованную двумя пересекающимися окружностями равных радиусов. Есть ли у «линзы» оси симметрии и центр симметрии?

512 Через точку O требуется провести прямую, которая разбила бы данную фигуру на две равные части (рис. *8.40*). Как это сделать?
Указание. Обратите внимание на то, что фигура эта имеет центр симметрии.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 Расскажите о симметрии круга, квадрата, прямоугольника.

2 Начертите прямую k и отметьте точку A, не лежащую на этой прямой. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой k.



3 Перенесите рисунок в тетрадь. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой k.

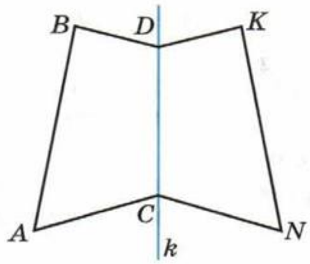
4 Прямая k — ось симметрии многоугольника $ABDKNC$. Назовите:

а) вершину многоугольника, симметричную вершине B;

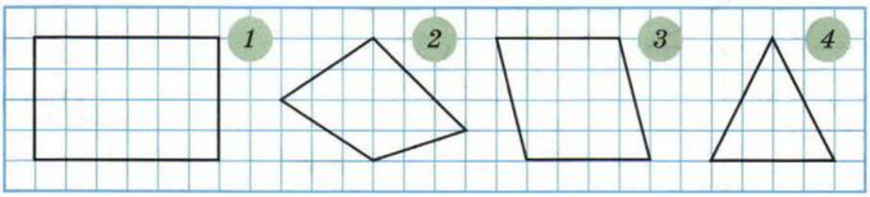
б) сторону, симметричную стороне KN;

в) отрезок, симметричный отрезку BC;

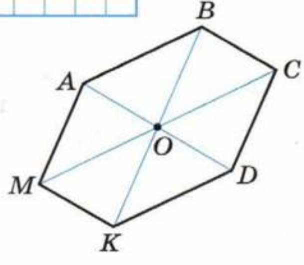
г) равные стороны многоугольника.



5 Найдите на рисунке фигуры с осевой симметрией, перерисуйте их в тетрадь и проведите оси симметрии. Найдите фигуру, имеющую центр симметрии, перерисуйте её в тетрадь и отметьте её центр симметрии.



6 Точка O — центр симметрии шестиугольника $ABCDKM$. Какая точка симметрична вершине M относительно точки O? Какая фигура симметрична относительно точки O отрезку AB? треугольнику KOD? четырёхугольнику $ABKM$?



7 Выполните задание.

1) Начертите на клетчатой бумаге перпендикулярные прямые k и m. Начертите произвольный треугольник ABC, не имеющий с проведёнными прямыми ни одной общей точки.

2) Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно прямой k.

3) Постройте треугольник $A_2B_2C_2$, симметричный треугольнику $A_1B_1C_1$ относительно прямой m.

4) Постройте треугольник $A_3B_3C_3$, симметричный треугольнику $A_2B_2C_2$ относительно прямой k.

5) Верно ли, что треугольник $A_3B_3C_3$ симметричен треугольнику ABC относительно прямой m?

6) Выпишите все пары центрально-симметричных треугольников.

глава 9

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

- КАКИЕ ЧИСЛА НАЗЫВАЮТ ЦЕЛЫМИ
- СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
- СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
- ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
- УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ИНТЕРЕСНО

Для выражения величин, которые могут изменяться в двух противоположных направлениях, людям потребовались отрицательные числа, т. е. числа, меньшие нуля.

Отрицательные числа были известны математикам ещё 2 тысячи лет тому назад. Но в практику они входили с большим трудом, через табу — нельзя. Дело в том, что с их введением нарушалось древнее правило, гласившее, что нельзя из меньшего числа вычитать большее. Китайский император Ши Хуан Ди (II в. до н.э.), разгневавшись на учёных, описавших в своих трудах отрицательные числа, велел все их рукописи сжечь, а самих авторов, а заодно и их читателей казнить.

34 КАКИЕ ЧИСЛА НАЗЫВАЮТ ЦЕЛЫМИ

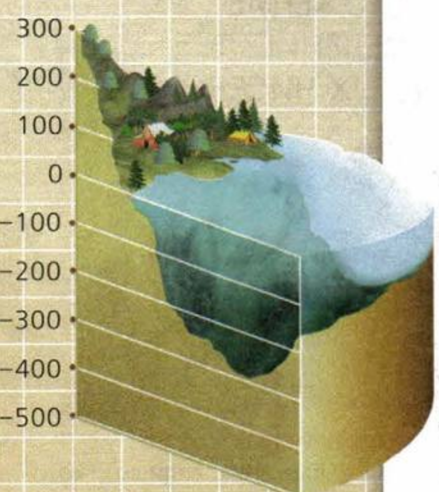
ВЫ УЗНАЕТЕ

- Зачем нужны отрицательные числа
- Какие числа называют противоположными
- Примеры использования отрицательных чисел в жизни

До сих пор на уроках математики мы рассматривали натуральные числа и дробные. Однако в жизни вы уже наверняка встречались и с другими числами — *отрицательными*. Так, из сообщения о погоде вы могли услышать, что температура воздуха была, например, -12°, а на географической карте увидеть отметку -1637 м для глубины озера Байкал.

Такие числа, «похожие» на натуральные, но со знаком «минус», нужны в тех случаях, когда величина может изменяться в двух противоположных направлениях. Для выражения величины отрицательным числом вводят некоторую начальную, нулевую отметку; например, при измерении температуры за начало отсчёта принимается температура замерзания воды (при нормальном атмосферном давлении), а при измерении глубины морей — уровень Мирового океана. И если значение величины ниже нулевой отметки, то ставят знак «минус».

Это обозначение очень удобно, иначе оно не могло бы войти в практику. В самом деле, вполне можно было бы говорить так: «Сегодня ожидается температура от одного градуса мороза до одного градуса тепла». Но удобно ли читалось бы такое сообщение на экране телевизора? Согласитесь, что короче и нагляднее знакомый нам текст: «от -1° до $+1^\circ$». В настоящее время обозначение отрицательных чисел с помощью знака «минус» принято везде.



ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА Наряду с натуральными числами

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 100,\ \ldots,\ 1000,\ \ldots$$

мы будем рассматривать отрицательные числа, каждое из которых получается приписыванием к соответствующему натуральному числу знака «минус»:

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots,\ -100,\ \ldots,\ -1000,\ \ldots\ .$$

> **!** Натуральное число и отрицательное число, полученное из натурального приписыванием к нему знака «минус», называют **противоположными числами.**

Например, числа 15 и -15 являются противоположными. Можно сказать также, что число -15 противоположно числу 15, а число 15 противоположно числу -15.

Число 0 считается противоположным самому себе.

Отрицательные числа математики открыли очень давно. Они встречаются уже в рукописи древнекитайского учёного Джань Цаня (I в. до н.э.). Знака «минус» тогда не было, а чтобы различать положительные и отрицательные числа, Джань Цань писал их чернилами разных цветов. Чтобы разработать современное толкование отрицательных чисел, понадобились усилия многих учёных на протяжении 18 веков от Джань Цаня до Декарта.

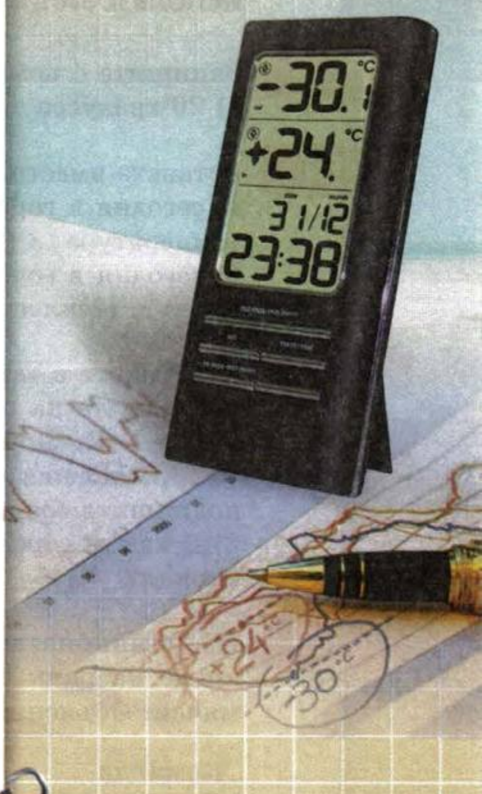
С помощью знака «−», как мы видели, записывается число, противоположное натуральному. Этот знак мы будем использовать и для обозначения числа, противоположного отрицательному.

Например, число, противоположное −15, записывается так: −(−15). Но число, противоположное −15, — это 15, т. е.

$$-(-15) = 15.$$

Точно так же $-(-7) = 7$, $\quad -(-109) = 109$.

Число, противоположное числу a, обозначают $-a$.
Если $a = 25$, то $-a = -25$;
если $a = -40$, то $-a = -(-40) = 40$;
если $a = 0$, то $-a = 0$.
Для того чтобы записать число, противоположное отрицательному, мы заключаем это отрицательное число в скобки. Такие выражения, как $- -15$, смысла не имеют.



ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА Натуральные числа 1, 2, 3, ..., отрицательные числа −1, −2, −3, ... и число 0 объединяют одним термином — **целые числа.**

Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 составляют множество целых чисел.

Современное обозначение положительных и отрицательных чисел знаками «+» и «−» было введено только в конце XV в. немецким математиком Видманом.

Натуральные числа принято называть также *положительными целыми числами*, т. е. слова «натуральное число» и «положительное целое число» означают одно и то же.

Перед положительными числами, для того чтобы подчеркнуть внешне их отличие от отрицательных, иногда ставится знак «+». Например, +5 — это то же самое число, что и 5, т. е. $+5 = 5$. Поэтому о двух целых числах можно сказать, что это *числа одного знака*, если они оба положительны или оба отрицательны. В противном случае, если одно число положительно, а другое отрицательно, говорят, что эти *числа разных знаков*. О противоположных числах говорят, что они *отличаются только знаками*.

Число 0 занимает, как всегда, особое положение: оно не относится ни к положительным, ни к отрицательным числам, а как бы разделяет их.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие числа называют целыми?
- Как иначе называют натуральные числа?
- Объясните, что означает запись −(−20), и упростите её.
- Приведите примеры использования положительных и отрицательных чисел в жизни.

УПРАЖНЕНИЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗНАКОВ «+» И «–» В ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

513 Запишите с помощью знаков «+» и «−» сообщения службы погоды:
а) 20 градусов тепла; б) 20 градусов мороза.

514 Вставьте вместо многоточия подходящее слово:
а) сегодня в городе $-5°$, завтра ожидается $-8°$; температура ... (повышается / понижается);
б) сегодня в городе $-20°$, завтра ожидается $-13°$; будет ... (теплее / холоднее).

515 Изобразите в тетради шкалу термометра.
1) Отметьте на ней следующие данные погоды на 10 января: Париж +1 °C, Лондон −3 °C, Берлин −9 °C, Рим +6 °C, Варшава −12 °C, Москва −10 °C, Новосибирск −24 °C. (Справа от шкалы подпишите соответствующие города.)
2) В каком городе ожидается самая высокая температура? самая низкая?

516 На чемпионатах по футболу результаты команд при равном числе набранных очков сравнивают по разнице забитых и пропущенных мячей. Объясните, что означают следующие данные:

Команда	Разница забитых и пропущенных мячей
Бразилия	+7
Россия	+1
Польша	−3
Камерун	−5

517 Какие из чисел −7, +4, 12, −18, 0, 3 являются:
а) положительными; б) отрицательными?

518 Бросают одновременно два кубика: белый и чёрный. Очки, выпавшие на белом кубике, считают выигрышем, а на чёрном — проигрышем. Общий итог — выигрыш или проигрыш — записывают со знаком «+» или «−». Так, в ситуации, изображённой на рисунке, общий итог — выигрыш; он составил 3 очка.
Запишите, используя знаки «+» и «−», общий итог в следующих ситуациях:
а) на белом кубике выпало 6 очков, а на чёрном — 3 очка;
б) на белом кубике выпало 3 очка, а на чёрном — 4 очка;
в) и на белом, и на чёрном кубике выпало 5 очков.

519 Подсчитайте итоги денежных операций и запишите результат с помощью положительных и отрицательных чисел:
а) доход 5 тыс. р. и расход 9 тыс. р.;
б) доход 6 тыс. р. и расход 2 тыс. р.;
в) расход 8 тыс. р. и расход 9 тыс. р.;
г) доход 7 тыс. р. и расход 7 тыс. р.

520 а) Коллекционер купил пять картин по цене 3000 р., 1600 р., 1200 р., 2500 р. и 5000 р. Потом он их продал соответственно за 3500 р., 1500 р., 1000 р., 2700 р. и 4500 р. Определите, какой доход или убыток получил он от продажи каждой картины. Запишите ответ, используя знаки «+» и «−».
б) Подводная лодка сначала плыла на глубине 400 м, потом опустилась на 200 м глубже, затем поднялась на 300 м. На какой глубине находится подводная лодка? Запишите ответ с помощью знака «−».

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА

521 Назовите число, противоположное данному:
$+5$; -2; $+4$; -21; 18; -32; 11; -7; -15; 10; 0.

522 Запишите число, противоположное данному:
а) -4; б) -3; в) $+1$; г) -5; д) -100; е) 1800.
Образец. $-(+10) = -10$; $-(-10) = 10$.

523 Запишите без скобок:
$-(+11)$; $-(+9)$; $-(-7)$; $-(-10)$; $-(+15)$; $-(-20)$.

524 Какое число надо записать в скобках, чтобы получилось верное равенство:
а) $-(...) = -11$; б) $-(...) = 11$; в) $-(...) = 86$; г) $-(...) = -71$?

525 1) Заполните таблицу.

a	7	−4			5		0	
$-a$			0	−1		8		−3

2) Верно ли утверждение: а) a — число положительное; б) $-a$ — число отрицательное?

526 Закончите предложение:
1) если b — положительное число, то $-b$ ...;
2) если b — отрицательное число, то $-b$ ....
Для каждого случая приведите числовой пример.

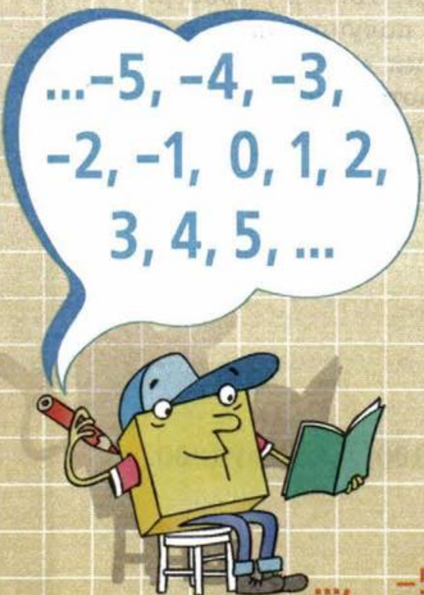
527 Запишите число, равное данному:
а) $-(-(+1))$; в) $-(-(-(+8)))$; д) $\underbrace{-(-(-(\ldots(-}_{\text{10 знаков «−»}}(+3))\ldots)$;
б) $-(-(-2))$; г) $-(-(-(-5)))$; е) $\underbrace{-(-(-(\ldots(-}_{\text{15 знаков «−»}}(+3))\ldots)$.

35 СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Правило сравнения целых чисел

Чтобы оперировать целыми числами, надо прежде всего научиться их сравнивать.



КАКОЕ ИЗ ДВУХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ БОЛЬШЕ И КАКОЕ МЕНЬШЕ

Вспомним, что из двух натуральных чисел бо́льшим считается то, которое при счёте появляется позже, и меньшим то, которое появляется раньше. Так,

$$10 < 14, \quad 60 < 85, \quad 248 < 500.$$

Натуральные числа мы записываем в том порядке, в котором они появляются при счёте:

1, 2, 3, 4, 5, ...

Двигаясь по ряду натуральных чисел вправо, мы переходим от меньшего числа к большему, а двигаясь влево — от большего числа к меньшему. Поэтому в натуральном ряду запятые можно заменить на знак «меньше»:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 \quad \ldots$$

В натуральном ряду есть начало — число 1, но нет конца: мы можем двигаться по натуральному ряду вправо как угодно далеко, до бесконечности.

Целые числа также можно расположить в ряд, но он не будет иметь ни начала, ни конца, продолжаясь бесконечно в обе стороны:

$$\ldots, \quad -5, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots$$

Естественно правило сравнения натуральных чисел распространить на целые числа.

> **!** Из двух целых чисел больше то, которое в ряду целых чисел стоит правее, и меньше то, которое стоит левее.

Записывая целые числа в ряд, мы также можем заменить запятые на знак «меньше»:

$$\ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 \quad \ldots$$

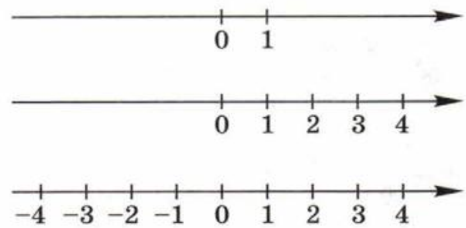
Пишут	Читают
$a > 0$	a — положительное число
$a < 0$	a — отрицательное число

Любое положительное число в ряду целых чисел расположено правее нуля, а любое отрицательное — левее нуля. Поэтому предложения «a — положительное число» и «a — отрицательное число» на математическом языке записывают в виде неравенств

$$a > 0 \text{ и } a < 0.$$

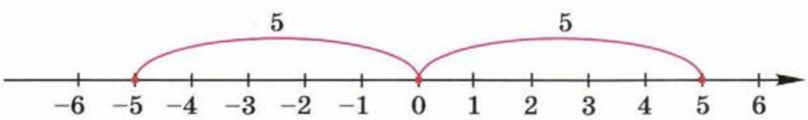
ИЗОБРАЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ТОЧКАМИ КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ Проведём горизонтальную прямую и отметим на ней две точки, изображающие числа 0 и 1 (рис. ***9.1***). Точка с координатой 0 делит прямую на два луча. На правом луче будем, как обычно, отмечать натуральные числа (т. е. целые положительные числа), а на левом — отрицательные. Направление луча, на котором отмечают положительные числа, называют *положительным направлением* и указывают стрелкой.

Откладывая последовательно единичные отрезки вправо от нуля и влево от нуля, будем получать изображения на прямой целых чисел.



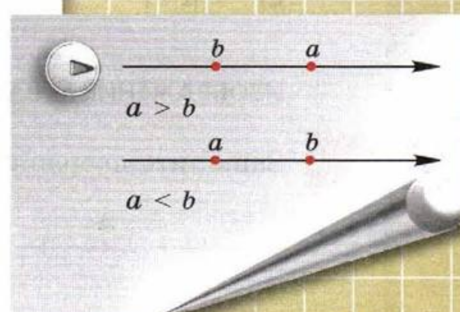
9.1

Противоположные числа изображаются точками, симметричными относительно точки с координатой 0. Например, числам 5 и −5 соответствуют точки, расположенные справа и слева от нуля на одном и том же расстоянии, равном 5 единицам (рис. ***9.2***).



9.2

ПРИМЕРЫ СРАВНЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ Чтобы сравнить два целых числа, можно представить, как они расположены по отношению друг к другу на координатной прямой: какое из них находится правее, а какое — левее.



Пример 1. Сравним числа 256 и −104.

Положительное число 256 расположено справа от 0, а число −104 — слева от 0. Значит, на координатной прямой число 256 расположено правее числа −104 (рис. ***9.3***). Поэтому 256 > −104.

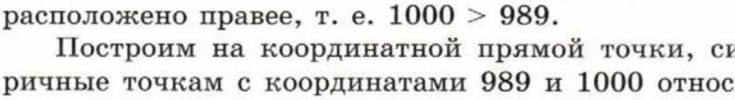
9.3

Пример 2. Сравним числа −1000 и −989.

Сравним сначала противоположные им натуральные числа 1000 и 989. Число 1000 на координатной прямой расположено правее, т. е. 1000 > 989.

Построим на координатной прямой точки, симметричные точкам с координатами 989 и 1000 относительно точки 0 (рис. ***9.4***). Точка с координатой −1000 оказалась левее точки −989, значит,

$$-1000 < -989.$$



9.4

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Чем похожи и чем различаются ряд натуральных чисел и ряд целых чисел?
- На примере числа −5 расскажите, как целые отрицательные числа изображают точками на координатной прямой.
- Сравните числа:

  а) −108 и 12;

  б) −89 и −98.

УПРАЖНЕНИЯ

РЯД ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

528 Продолжите ряд целых чисел влево и вправо, записав ещё по три числа:
а) ..., −37, −36, −35, ...; б) ..., 2, 3, 4, 5, ...; в) ..., −98, −97, −96, ...

529 Назовите по порядку целые числа:
а) от −5 до 5; в) от −10 до 0; д) от −40 до −25;
б) от −7 до 3; г) от −15 до 9; е) от −100 до −90.

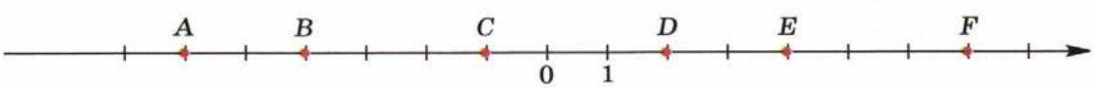
530 Укажите, какое из чисел ближе к 0:
а) 10 или 100; в) −10 или 2; д) 7 или −7;
б) −10 или −100; г) −2 или 10; е) −4 или 4.

531 Между какими двумя ближайшими целыми числами находится данное число (ответ запишите в виде двойного неравенства):
а) 3; б) 0; в) −4; г) −1; д) −100; е) −253?
Образец. $-3 < -2 < -1$.

532 Запишите сначала в порядке возрастания, а потом в порядке убывания целые числа, заключённые между:
а) −7 и 2; б) −15 и −5; в) −3 и 3; г) −20 и −10.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧИСЕЛ ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

533 Запишите координаты отмеченных точек.



Образец. Координата точки E равна 4; это записывается так: E (4).

534 Начертите координатную прямую. Отметьте на ней точками данное число и число, ему противоположное:
а) 2; 4; 6; 8; б) −1; −3; −5; −7.

535 Используя координатную прямую, выясните, какой знак имеет целое число b, если:
а) $a < 0$ и $b < a$; б) $a > 0$ и $b > a$.

СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

536 Сравните целые числа:
а) 3 и −8; в) −1 и −10; д) 4 и 0;
б) −8 и 8; г) −6 и 0; е) −9 и −2.

537 а) Какое из двух целых чисел больше: положительное или отрицательное? положительное или 0? отрицательное или 0?
б) Какое из двух целых чисел меньше: положительное или 0? отрицательное или 0? положительное или отрицательное?

538 Сравните числа:
а) -1000 и 253; в) 351 и -351; д) -200 и 2;
б) -2000 и -150; г) -101 и -102; е) -310 и -1003.

539 Назовите какие-нибудь пять целых чисел:
а) меньших 0; б) больших 0; в) меньших 2; г) больших -7.

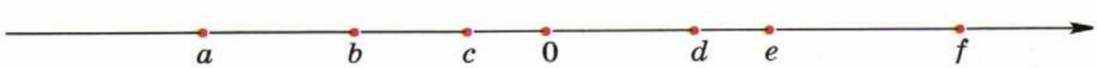
540 Запишите все отрицательные целые числа, которые:
а) больше -8;
б) больше -12, но меньше -9;
в) меньше 3, но больше -11.

541 Запишите в виде неравенства:
а) -5 — отрицательное число;
б) 17 — положительное число.

542 Какие целые числа можно подставить вместо буквы a, чтобы получилось верное неравенство:
а) $-1 < a < 3$; в) $-20 < a < -10$;
б) $-7 < a < 7$; г) $-105 < a < -96$?

543 1) Запишите данные числа в порядке возрастания:
а) 0, 2, -2, -15, 1, -40, 5; б) 32, -130, 19, -154, -21.
2) Запишите данные числа в порядке убывания:
а) 10, -1, 0, 2, -4, -10, -20; б) -7, 17, -48, 50, -63.

544 На координатной прямой отмечены целые числа a, b, c, d, e и f.



Сравните:
а) d и 0; в) e и f; д) a и c;
б) b и 0; г) b и e; е) b и a.

545 Выполните задание и проиллюстрируйте каждый случай конкретным примером.
а) Известно, что a и b — положительные целые числа, причём $a < b$. Сравните $-a$ и $-b$.
б) Известно, что a и b — отрицательные целые числа, причём $a < b$. Сравните $-a$ и $-b$.
в) Известно, что a и b — целые числа разных знаков, причём $a < b$. Сравните $-a$ и $-b$.

36 СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как можно вычислить сумму двух целых чисел одного знака и двух целых чисел разных знаков

$(-4)+(-5)=-9$

$(+5)+(-3)=+2$

Математики древности (например, древнегреческий математик Диофант, живший в III в., индийский математик Брахмагупта, живший в VII в., арабский математик Абу-ль-Вефа, живший в X в.) называли отрицательные числа словами, означавшими «долг», «недостаток», в отличие от «имущества» — положительного числа.

Чтобы понять, по каким правилам складывают целые числа, рассмотрим «денежные» примеры — с доходами и расходами. При этом израсходованные суммы денег будем обозначать отрицательными числами.

СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ОДНОГО ЗНАКА И РАЗНЫХ ЗНАКОВ

Сначала рассмотрим сложение чисел *одного знака*. Положительные целые числа, т. е. натуральные числа, мы складывать умеем. Например:

$$(+9) + (+11) = +20.$$

Из примера с подсчётом денег легко понять, как складываются отрицательные числа. Если человек израсходовал сначала 4 тыс. р., а затем ещё 5 тыс. р., то общий расход составил 9 тыс. р. Поэтому естественно считать, что

$$(-4) + (-5) = -9.$$

Величину расхода мы определили сложением соответствующих противоположных чисел:

$$4 + 5 = 9.$$

> Сумма двух положительных чисел положительна, а сумма двух отрицательных чисел отрицательна.

А как складывать числа *разных знаков*? Ясно, что если человек получил денег больше, чем потратил, то его доход окажется положительным. Например, если он получил 5 тыс. р. и потратил 3 тыс. р., то его доход составил 2 тыс. р.:

$$(+5) + (-3) = +2.$$

Величину дохода в этом случае мы нашли вычитанием:

$$5 - 3 = 2.$$

Если же человек получил денег меньше, чем ему надо потратить, то его доход выражается отрицательным числом. Например, при доходе 4 тыс. р. и расходе 7 тыс. р. получится убыток, равный 3 тыс. р. Поэтому

$$(-7) + (+4) = -3.$$

Величину убытка мы также нашли вычитанием:

$$7 - 4 = 3.$$

Древнекитайский математик Джань Цань правило сложения отрицательных чисел формулировал так: «Если к одному долгу прибавить другой долг, то в результате получится долг, а не имущество».

Сумма двух чисел разных знаков может быть как положительным числом, так и отрицательным. Знак суммы зависит от того, какое слагаемое «перевесило» — положительное или отрицательное.

Итак, при сложении целых чисел мы работаем в действительности только с соответствующими натуральными числами. Но в одних случаях (когда слагаемые одного знака) мы эти натуральные числа складываем, а в других случаях (когда слагаемые разных знаков) из большего натурального числа вычитаем меньшее.

Представим теперь, что доход и расход были одинаковы, например по 10 тыс. р. Очевидно, что в этом случае прибыль равна нулю. Поэтому $(+10) + (-10) = 0$.

Сумма противоположных чисел равна 0:

$$\boldsymbol{a + (-a) = 0.}$$

Наконец, правило сложения целого числа с нулём такое же, как и для натуральных чисел:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Например, $(-43) + 0 = -43$, $0 + (-18) = -18$.

Заметим, что действие сложения целых чисел, как и действие сложения натуральных чисел, обладает переместительным и сочетательным свойствами. Эти свойства позволяют переставлять слагаемые и объединять их в группы.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Пример 1. Найдём сумму $(-6) + 10 + (-4)$.

Чтобы вычислить эту сумму, можно последовательно складывать числа в том порядке, в котором они записаны:

$$(-6) + 10 + (-4) = 4 + (-4) = 0.$$

А можно сначала сгруппировать отрицательные слагаемые:

$$(-6) + 10 + (-4) = ((-6) + (-4)) + 10 = (-10) + 10 = 0.$$

Пример 2. Найдём значение выражения $a + b$ при $a = 18$, $b = -25$.

Подставив в выражение $a + b$ вместо a и b указанные числа, получим

$$a + b = 18 + (-25) = -7.$$

Обратите внимание: подставляя отрицательное число, мы заключаем его в скобки.

$(+5) + (+7) = +12$

$(-5) + (-7) = -12$

$(+5) + (-7) = -2$

$(-5) + (+7) = +2$

$$(-3) + (+3) = 0$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой знак имеет сумма двух положительных целых чисел? двух отрицательных целых чисел? Вычислите: $(-17) + (-9)$.
- Как определить, каким числом — положительным или отрицательным — является сумма двух целых чисел разных знаков? Вычислите: $20 + (-15)$; $15 + (-20)$.
- Чему равна сумма противоположных чисел?

УПРАЖНЕНИЯ

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

546 Найдите сумму (представьте, что вы подсчитываете доходы и расходы):
а) $(+1) + (+3)$, $(-4) + (+1)$, $(-3) + (-3)$;
б) $(+4) + (-3)$, $(-5) + (-2)$, $(+3) + (+3)$;
в) $(+1) + (-5)$, $(-4) + (-6)$, $(+7) + (-3)$.

547 Определите знак суммы и выполните сложение:
а) $(-10) + (+11)$; б) $(-7) + (-6)$; в) $(-4) + (+2)$; г) $(-12) + (+3)$; д) $(-15) + (+18)$; е) $(-11) + (-20)$; ж) $(+20) + (-21)$; з) $(-100) + (-150)$; и) $(-3) + (+4)$.

548 1) Найдите сумму противоположных чисел:
а) $(+8) + (-8)$; б) $(-10) + (+10)$; в) $(-100) + (+100)$.
2) Вычислите сумму:
а) $(-13) + (+1) + (-1)$; б) $(+20) + (-20) + (+1)$; в) $(-35) + (+35) + (+8)$; г) $0 + (-11) + (+11)$; д) $(+12) + (-6) + (-12)$; е) $(-7) + (-15) + (+15)$.

549 Выполните сложение:
а) $(+6) + (-7)$; б) $(-5) + (+14)$; в) $(-20) + (+13)$; г) $(-7) + (+7)$; д) $(+9) + (-14)$; е) $(-8) + (+11)$; ж) $(+17) + (-9)$; з) $(+8) + (-13)$; и) $(-7) + (+9)$.

550 Запишите и вычислите сумму чисел:
а) -13 и 22; б) $+12$ и -17; в) -19 и 0; г) -17 и -30.

551 1) Представьте в виде суммы двух отрицательных слагаемых число:
а) -10; б) -23; в) -99; г) -101.
2) Представьте в виде суммы двух слагаемых разных знаков число:
а) -8; б) $+8$; в) -25; г) 0.

552 Запись суммы положительных и отрицательных чисел часто упрощают: положительные числа записывают без знака «+», а отрицательное число, которое стоит в начале выражения, записывают без скобок. Например, $(-20) + (+4) = -20 + 4$.
Опустите скобки и знак «+» там, где это возможно:
а) $(+7) + (-10)$; б) $(-8) + (-11)$; в) $(-5) + (+12)$; г) $(+6) + (+18)$; д) $(+3) + (-1) + (-15)$; е) $(-8) + (+12) + (-4)$.

553 Замените сумму равной ей суммой, поменяв местами слагаемые:
а) $7 + (-3) = \ldots$; б) $-4 + (-2) = \ldots$; в) $-10 + 5 = \ldots$; г) $-1 + 8 = \ldots$.

554 Найдите сумму:
а) $-5 + (-10)$; б) $-20 + (-6)$; в) $-15 + (-20)$; г) $26 + (-6)$; д) $80 + (-20)$; е) $-8 + 8$; ж) $-150 + 100$; з) $-36 + 20$.

555 Подберите пропущенное слагаемое:

а) $8 + ... = 5$; г) $(-1) + ... = -1$; ж) $3 + ... = -3$;
б) $15 + ... = 0$; д) $(-10) + ... = -5$; з) $(-2) + ... = -12$;
в) $(-4) + ... = -6$; е) $7 + ... = -2$; и) $0 + ... = -6$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ НЕСКОЛЬКИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

556 Вычислите:

а) $-9 + 12 + (-8)$; г) $-10 + (-19) + 10$; ж) $8 + (-17) + 17$;
б) $10 + (-7) + (-6)$; д) $25 + (-3) + 17$; з) $-20 + (-4) + 9$;
в) $-5 + (-6) + (-9)$; е) $9 + (-15) + 14$; и) $25 + 14 + (-19)$.

557 Запишите сумму данных чисел и вычислите её:

а) -3, $+8$, $+7$ и -4;
б) $+15$, -5, 0, -12 и $+7$.

558 Найдите сумму (приведите разные способы вычисления):

а) $(-2) + (-4) + (-6) + 4 + 3 + 5$;
б) $(-5) + (-4) + (-3) + 15 + 14 + 13$;
в) $1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6)$;
г) $20 + (-18) + 16 + (-14) + 12 + (-10)$.

559 Дана сумма $-2 + (-4) + 7$. Запишите все возможные суммы, которые можно получить из данной перестановкой слагаемых. Чему равно значение каждого из выражений?

560 Найдите значение выражения:

а) $-(-8) + 3$; г) $-((-3) + 1)$;
б) $-(12 + (-1))$; д) $-((-20) + (-10))$;
в) $-(-10) + (-6)$; е) $-(-(6 + 4))$.

561 Найдите сумму всех целых чисел:

а) от -100 до 100; в) от -70 до 50;
б) от -100 до 150; г) от -150 до 70.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

562 Найдите значение выражения:

а) $a + 35$ при $a = -50, -35, -18, 0, 15, 35$;
б) $x + y + 1$ при $x = -3$, $y = -6$; $x = -9$, $y = 5$; $x = -1$, $y = -2$.

563 Найдите значение суммы $a + b + c$ при указанных значениях a, b и c:

а) $a = 17$, $b = -23$, $c = -9$;
б) $a = -33$, $b = -18$, $c = 26$;
в) $a = 25$, $b = -19$, $c = 50$;
г) $a = -12$, $b = -20$, $c = -19$.

37 ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как можно вычислить разность двух целых чисел

Если вы хорошо научились складывать целые числа, то сумеете вычислить и их разность. Дело в том, что вычитание всегда сводится к сложению.

ПРАВИЛО ВЫЧИТАНИЯ Вспомним, что разностью чисел a и b называется такое число c, которое при сложении с числом b даёт число a. Это определение разности мы распространим и на целые числа. Например:

$$2 - 7 = -5, \text{ так как } (-5) + 7 = 2.$$

Итак, разность $2 - 7$ равна -5. Но и сумма $2 + (-7)$ равна -5, т. е.

$$2 - 7 = 2 + (-7).$$

Таким образом, чтобы найти разность чисел 2 и 7, нужно к числу 2 прибавить число -7.

Точно так же

$$5 - (-3) = 5 + (+3),$$
$$(-14) - (+6) = (-14) + (-6),$$
$$0 - (-7) = 0 + (+7).$$

Вообще вычитание всегда можно свести к сложению.

! Чтобы из одного числа вычесть другое, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

С помощью букв это правило записывается так:

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b).}$$

Пример 1. Найдём разность $(-12) - 24$:

$$(-12) - 24 = (-12) + (-24) = -36.$$

Пример 2. Найдём разность $12 - (-24)$:

$$12 - (-24) = 12 + (+24) = 36.$$

Обратите внимание на важное отличие множества целых чисел от множества натуральных чисел. В множестве натуральных чисел сложить можно любые два числа, но вычесть одно число из другого можно не всегда. Так, нельзя из числа 3 вычесть 5.
Благодаря введению отрицательных чисел мы получили возможность вычитать из меньшего числа большее. И в множестве целых чисел действие вычитания выполнимо всегда.

$a - b = a + (-b)$

Например:

$3 - 5 = 3 + (-5) = -2$

$3 - (-5) = 3 + (+5) = 8$

$-3 - (-5) = -3 + (+5) = 2$

Можно сказать, что арифметика целых чисел «богаче» арифметики натуральных чисел: с целыми числами мы можем обращаться более свободно, чем с натуральными.

В том же смысле арифметика дробных чисел «богаче» арифметики натуральных чисел: одно дробное число всегда можно разделить на другое (не равное 0), а в множестве натуральных чисел действие деления выполнимо не всегда.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ДЕЙСТВИЯ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ Рассмотренные правила сложения и вычитания позволяют вычислять значения «длинных» выражений, составленных из целых чисел с помощью знаков «плюс» и «минус».

Пример 3. Найдём значение выражения

$$28 - 37 - 13 + 26.$$

Представим данное выражение в виде суммы

$$28 + (-37) + (-13) + 26.$$

Эту сумму можно вычислить, складывая числа последовательно:

$$\underbrace{28 + (-37)}_{-9} + (-13) + 26 = \underbrace{-9 + (-13)}_{-22} + 26 = 4.$$

Но можно воспользоваться и другим приёмом — сложить по отдельности положительные и отрицательные слагаемые, а затем найти сумму двух получившихся чисел:

$$28 + (-37) + (-13) + 26 = 28 + 26 + (-37) + (-13) =$$
$$= 54 + (-50) = 4.$$

Кстати, именно так обычно поступают, подводя итоги денежных операций: подсчитывают отдельно доходы и расходы, а затем находят общий результат.

Пример 4. Найдём значение выражения $a + b - c$ при $a = 10$, $b = -12$, $c = -5$:

$$a + b - c = 10 + (-12) - (-5) =$$
$$= 10 + (-12) + 5 = 3.$$

Сначала мы подставили вместо букв указанные числа, заключив при этом отрицательное число в скобки. Затем заменили вычитание сложением и вычислили значение получившейся суммы.

Найдём значение выражения 7 - 5 + 9 - 3.

Способ 1.

$7 - 5 + 9 - 3 =$
$= 7 + (-5) + 9 + (-3) =$
$= 2 + 9 + (-3) =$
$= 11 + (-3) = 8.$

Способ 2.

$7 - 5 + 9 - 3 =$
$= 7 + (-5) + 9 + (-3) =$
$= 7 + 9 + (-5) + (-3) =$
$= 16 + (-8) = 8.$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте правило вычисления разности двух целых чисел и запишите его с помощью букв.
- Вычислите:
  а) 12 − (−18);
  б) −20 − (−20);
  в) −9 − 6.
- Представьте число −10 в виде разности двух целых чисел разными способами.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

564 Замените вычитание сложением и вычислите:
а) $(-1) - 8$; б) $(-3) - 14$; в) $(-5) - 2$; г) $(-12) - 10$.

565 Найдите разность:
а) $4 - (-7)$; г) $-7 - (-9)$; ж) $-17 - (-2)$; к) $3 - (-3)$;
б) $18 - (-5)$; д) $46 - (-6)$; з) $15 - (-20)$; л) $23 - (-28)$;
в) $-21 - (-20)$; е) $-30 - (-30)$; и) $-50 - (-5)$; м) $-31 - (-62)$.

566 Выполните вычитание:
а) $7 - 7$; в) $3 - 5$; д) $0 - 11$; ж) $0 - 3$;
б) $2 - 8$; г) $1 - 10$; е) $10 - 12$; з) $4 - 7$.

567 Вычислите:
а) $-10 - 20$; в) $-12 - 10$; д) $-1 - 100$; ж) $-11 - 11$;
б) $-4 - 5$; г) $-60 - 1$; е) $-5 - 0$; з) $-25 - 75$.
Подсказка. а) $-10 - 20$ — это разность чисел -10 и 20; представьте её в виде суммы, т. е. прибавьте к -10 число, противоположное 20.

568 Поставьте вместо многоточия знак $=$ или $\neq$:
а) $-3 - 2 \ldots -3 + (-2)$; в) $0 - (-1) \ldots 0 + 1$;
б) $-6 - 10 \ldots -6 - (-10)$; г) $-15 - (-2) \ldots -15 + (-2)$.

569 Вычислите:
а) $-256 + 181$; г) $154 - (-138)$; ж) $186 + (-235)$;
б) $-352 - 204$; д) $-206 + (-456)$; з) $194 + (-158)$;
в) $725 - 831$; е) $-315 - (-827)$; и) $789 - 1000$.

570 Решите уравнение:
а) $20 + x = 18$; г) $x + 4 = -1$; ж) $-9 + x = 5$;
б) $5 - x = 10$; д) $5 - x = -3$; з) $-7 - x = 4$;
в) $x - 6 = -11$; е) $x - (-4) = 0$; и) $x - (-2) = 1$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЛОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

571 Найдите значение выражения:
а) $20 + (-15) - (-6)$; в) $-3 + 12 - (-22)$;
б) $10 - 20 - (-40)$; г) $-7 - (-7) + (-29)$.

572 Представьте выражение в виде суммы и выполните вычисления:
а) $18 - 12 - 26$; д) $30 - 35 + 6$; и) $5 + 6 - 17$;
б) $-13 - 8 + 13$; е) $-1 + 2 - 3$; к) $-2 - 4 + 3$;
в) $-14 - 7 + 9$; ж) $5 - 13 + 8$; л) $-7 - 3 - 11$;
г) $7 - 12 - 8$; з) $-24 - 31 - 9$; м) $-4 + 4 + 8$.

573 Вычислите:

а) $26 - (18 + (-7))$;
б) $-84 - (-18 - 6)$;
в) $(3 - 23) - (4 - 10)$;
г) $(-8 + 15) - (-6 - 20)$.

574 Возьмём равенство $4 - 7 - 9 = 4 + (-7) + (-9)$. Поменяем местами его левую и правую части:

$$4 + (-7) + (-9) = 4 - 7 - 9.$$

Последнее равенство показывает, что сумму $4 + (-7) + (-9)$ можно записать проще, без скобок и промежуточных знаков сложения — просто выписать одно слагаемое за другим с их знаками.

Используя рассмотренный приём, замените выражение равным, не содержащим скобок, действуя по следующему образцу:

$5 - (+2) + (-3) = 5 + (-2) + (-3) = 5 - 2 - 3$.

а) $-3 + (-8) + (-9)$;
б) $-2 - (-4) + (-10)$;
в) $-5 - (-17) + 4 - (-3)$;
г) $4 - (-1) - (-2) + (-3) - 8$.

575 Не записывая выражение в виде суммы явно, перечислите входящие в эту сумму слагаемые:

а) $-1 - 14 + 32$;
б) $18 - 30 - 31$;
в) $-101 - 102 - 103$.

576 Вычислите, сложив отдельно положительные и отрицательные числа:

а) $-5 - 3 + 6 - 8 + 4$;
б) $1 - 2 + 5 - 7 - 11$;
в) $7 - 4 - 9 + 8 - 6$;
г) $4 - 8 + 3 - 9 + 6$;
д) $17 - 19 - 50 + 21 + 37$;
е) $-31 + 42 + 14 - 12 - 60$.

Образец. Найдём значение выражения $-28 + 17 - 16 + 13$.

1) $17 + 13 = 30$;
2) $-28 - 16 = -44$;
3) $30 - 44 = -14$.

577 Вычислите:

а) $14 - 23 - 37 + 23 + 56 - 13$;
б) $27 - 49 - 12 + 38$;
в) $-51 - 18 - 29 + 11 + 51 + 29 - 14$;
г) $46 + 34 - 15 - 34 - 46 + 15 - 100$.

578 Рассматривая выражение $10 - 15 + 20$ как сумму, переставьте слагаемые в этой сумме всеми возможными способами.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

579 Найдите значение выражения:

а) $3 - c$ при $c = 7; -5$;
б) $x - 10$ при $x = -15; -10$;
в) $a - b$ при $a = 7$, $b = -10$;
г) $x - y$ при $x = -3$, $y = -13$.

580 Поставьте в выражение $a + b - c$ указанные числа и выполните вычисления:

а) $a = -3$, $b = -15$, $c = -27$;
б) $a = -65$, $b = 15$, $c = -50$.

581 Известно, что $a = -100$, $b = 180$, $c = -125$. Найдите:

а) $a - b + c$;
б) $a - b - c$;
в) $a + b + c$;
г) $-a - b + c$.

38 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как можно найти произведение и частное двух целых чисел

Рассмотрим, как выполняются ещё два арифметических действия с целыми числами — умножение и деление. При этом главным будет вопрос: «Как по знакам компонентов действия определить знак результата?»

УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ Чтобы понять, как перемножают целые числа, рассмотрим четыре произведения, множители в которых различаются только знаками:

$$5 \cdot 3, \quad (-5) \cdot 3, \quad 3 \cdot (-5), \quad (-5) \cdot (-3).$$

Для натуральных чисел умножение сводится к сложению, поэтому произведение $5 \cdot 3$ — это сумма трёх слагаемых, каждое из которых равно 5:

$$5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15.$$

Произведением $(-5) \cdot 3$ естественно считать сумму трёх слагаемых, каждое из которых равно -5. Так как $(-5) + (-5) + (-5) = -15$, то

$$(-5) \cdot 3 = -15.$$

Понятно, что произведение $3 \cdot (-5)$, которое получается из произведения $(-5) \cdot 3$ перестановкой множителей, тоже должно быть равно -15:

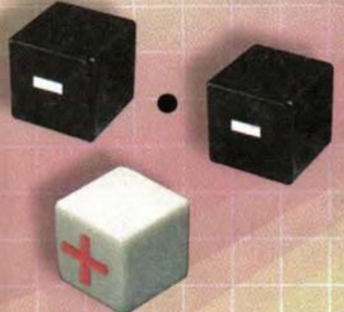
$$3 \cdot (-5) = -15.$$

Остаётся сообразить, как перемножить отрицательные числа -5 и -3. Ещё в XVIII в. великий учёный, математик и механик Леонард Эйлер, работавший в России, объяснял правило умножения отрицательных чисел примерно следующим образом. Ясно, что $(-5) \cdot 3 = -15$. Поэтому произведение $(-5) \cdot (-3)$ не может быть равно -15. Однако оно должно быть как-то связано с числом 15. Остаётся одна возможность:

$$(-5) \cdot (-3) = 15.$$

Итак,

$5 \cdot 3 = 15,$	$(-5) \cdot 3 = -15,$
$(-5) \cdot (-3) = 15,$	$3 \cdot (-5) = -15.$



Самым «таинственным» во всей теории отрицательных чисел было правило «минус на минус даёт плюс». Даже самые крупные математики XVIII в. давали здесь на редкость туманные объяснения. Английский поэт У.Х. Оден с огорчением воскликнул: «Минус на минус — всегда только плюс. Отчего так бывает, сказать не берусь».

! **Произведение двух чисел одного знака положительно, а произведение двух чисел разных знаков отрицательно.**

Коротко *правила знаков* при умножении формулируют так:

плюс на минус даёт минус, минус на минус даёт плюс.

Числа 0 и 1 при умножении целых чисел сохраняют свои свойства:

$$\boldsymbol{a \cdot 0 = 0} \text{ и } \boldsymbol{a \cdot 1 = a}.$$

Например:
$(-4) \cdot 0 = 0$, $0 \cdot (-100) = 0$,
$(-26) \cdot 1 = -26$, $1 \cdot (-10) = -10$.

Особую роль при умножении целых чисел играет также число -1: **при умножении на -1 число заменяется на противоположное.**

Например, $12 \cdot (-1) = -12$, $(-12) \cdot (-1) = 12$.
Вообще

$$a \cdot (-1) = -a.$$

Умножение целых чисел обладает теми же свойствами, что и умножение натуральных, — переместительным и сочетательным. Справедливо также распределительное свойство.

Заметим, что распределительное свойство выполняется именно потому, что для умножения мы приняли указанные выше правила знаков, в частности правило «минус на минус даёт плюс». Поэтому, «открывая» правило умножения отрицательных чисел, можно было бы рассуждать так.
Попробуем ответить на вопрос: чему должно быть равно произведение $(-5) \cdot (-3)$, чтобы выполнялось распределительное свойство?
Если это свойство выполняется, то $(-5) \cdot ((-3) + 3) =$
$= (-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot 3 = (-5) \cdot (-3) + (-15)$.
С другой стороны, $(-5) \cdot ((-3) + 3) = (-5) \cdot 0 = 0$.
Таким образом, $(-5) \cdot (-3) + (-15) = 0$. Значит,

$$(-5) \cdot (-3) = 15.$$

ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ Правила деления двух целых чисел аналогичны правилам умножения — знак частного определяется по следующему *правилу знаков*:

Частное двух чисел одного знака положительно; частное двух чисел разных знаков отрицательно.

Например:
$(-16) : (-2) = 8$; $200 : (-100) = -2$; $(-8) : 8 = -1$.

При делении нуля на любое целое число, не равное нулю, в частном получается нуль. Например:

$$0 : (-7) = 0.$$

Как обычно, **на нуль делить нельзя.**

При делении любого целого числа на 1 получается это же число: $5 : 1 = 5$, $(-12) : 1 = -12$.

При делении любого целого числа на -1 получается противоположное число:

$$5 : (-1) = -5, (-12) : (-1) = 12.$$

$a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 1 = a$
$a \cdot (-1) = -a$

Правила знаков		
Знак компонентов действий		Знак результата
+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

$0 : a = 0$, где $a \neq 0$
$a : 1 = a$
$a : (-1) = -a$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте правила знаков при умножении и делении. Проиллюстрируйте эти правила примерами.
- Подберите такие целые числа a и b, чтобы выполнялось неравенство:
  а) $ab > 0$; б) $a : b < 0$.
- Запишите с помощью букв свойства нуля и единицы при умножении.
- Закончите равенство
  $a \cdot (-1) = ...$
  и дайте словесную формулировку этого свойства.

УПРАЖНЕНИЯ

УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

582 Выполните умножение:

а) $(+7) \cdot (-4)$,
$(-8) \cdot (-6)$,
$8 \cdot (-5)$,
$-6 \cdot 4$;

б) $(+15) \cdot (-3)$,
$(-6) \cdot (-3)$,
$-3 \cdot (-8)$,
$-7 \cdot 7$;

в) $(+12) \cdot (-5)$,
$(-3) \cdot (-100)$,
$11 \cdot (-4)$,
$-7 \cdot 80$.

583 Вычислите устно:

а) $-1 \cdot 10$;
б) $-18 \cdot (-1)$;
в) $26 \cdot (-1)$;
г) $0 \cdot (-25)$;
д) $-101 \cdot 0$;
е) $0 \cdot (-1)$.

584 Не выполняя умножения, сравните:

а) $-13 \cdot (-23)$ и 0;
б) $14 \cdot (-16)$ и 0;
в) $-37 \cdot 21$ и 0;
г) $-24 \cdot 25$ и $-24 \cdot (-25)$;
д) $-32 \cdot (-15)$ и $32 \cdot (-15)$;
е) $-22 \cdot 17$ и $(-17) \cdot 22$.

585 1) Найдите произведение:

а) $20 \cdot (-5) \cdot 6$;
б) $(-10) \cdot (-3) \cdot 4$;
в) $-2 \cdot (-3) \cdot 25$;
г) $4 \cdot (-4) \cdot (-1)$;
д) $(-1) \cdot (-10) \cdot (-10)$;
е) $-5 \cdot (-6) \cdot 3$.

2) Каким числом — положительным или отрицательным — является произведение трёх чисел, если:
а) два числа отрицательны, одно положительно;
б) одно число отрицательно и два положительны;
в) все три числа отрицательны?

586 1) Представьте данное число в виде произведения двух целых чисел (произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются одинаковыми):
а) -21; б) 20; в) -23; г) -1; д) 1; е) 0.
2) В каждом случае укажите, сколькими способами можно представить число в виде такого произведения.

587 Представьте число -60 в виде произведения:
а) трёх множителей; б) четырёх множителей.

588 Представьте число 120 в виде произведения нескольких множителей, среди которых есть отрицательные. Дайте несколько решений.

589 Расположите произведения в порядке возрастания их значений:
$-17 \cdot 23$; $-17 \cdot 38$; $-17 \cdot (-38)$; $-17 \cdot (-23)$.

590 1) Найдите значение выражения ab при $a = 16$ и $b = -12$.
2) Не производя вычислений, найдите значения следующих выражений при тех же значениях a и b: $-ab$; $a(-b)$; $(-a)(-b)$; $-(-a)b$; $-(-a)(-b)$.
3) Значение каких выражений равно значению произведения ab? Запишите цепочку: $ab = \dots$.

ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

591 Проверьте с помощью умножения, верно ли выполнено деление:
а) $(-42) : 2 = -21$;
б) $70 : (-7) = -10$;
в) $(-24) : (-6) = 4$;
г) $0 : (-3) = 0$.

592 Выполните деление:
а) $-48 : 12$;
б) $64 : (-4)$;
в) $12 : (-1)$;
г) $-30 : (-10)$;
д) $-78 : (-6)$;
е) $99 : (-11)$;
ж) $-100 : 5$;
з) $-850 : (-85)$;
и) $360 : (-12)$;
к) $-1 : (-1)$;
л) $-18 : 18$;
м) $-270 : (-30)$.

593 Какое число надо подставить вместо x, чтобы получилось верное равенство:
а) $25 \cdot x = -25$;
б) $x : 1 = -7$;
в) $x \cdot (-18) = 0$;
г) $-26 : x = 26$;
д) $x \cdot (-30) = 30$;
е) $x : (-8) = 0$;
ж) $-19 \cdot x = 19$;
з) $x : (-1) = -1$?

594 Решите уравнение:
а) $-10 \cdot x = 70$;
б) $x \cdot (-12) = -24$;
в) $-8 \cdot x = 64$;
г) $x \cdot (-4) = -20$.

РАЗНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

595 Вычислите:
а) $-7 \cdot (-6) + 17$;
б) $18 \cdot (-5) - 1$;
в) $-8 - 2 \cdot (-8)$;
г) $-27 : (-3) - 10$;
д) $10 - (-28) : (-7)$;
е) $-36 : (-8 + 20)$;
ж) $-4 \cdot (-3) : 12$;
з) $15 : (-5) \cdot (-6)$;
и) $-64 : (-8) : (-4)$.

596 Найдите значение выражения:
а) $2ab$ при $a = -8$, $b = -1$;
б) $2a - b$ при $a = 5$, $b = -10$;
в) $ab - 60$ при $a = -10$, $b = 3$;
г) $8 - (a + b)$ при $a = -10$, $b = -2$.

597 Подставьте в выражение $a \cdot b : c$ указанные числа и выполните вычисления:
а) $a = -12$, $b = 8$, $c = -6$;
б) $a = 24$, $b = -3$, $c = 9$;
в) $a = 60$, $b = 0$, $c = -5$;
г) $a = -18$, $b = -3$, $c = -9$.

598 Известно, что $a = -90$, $b = -15$, $c = 3$. Найдите значение выражения:
а) $a : b \cdot c$;
б) $a : (b \cdot c)$;
в) $a \cdot (b : c)$.

Неверно! Опровергните с помощью контрпримера утверждение:
1) если $a + b > 0$, то a и b — числа положительные;
2) если $ab > 0$, то a и b — числа положительные.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 1) Какие числа называют целыми?
2) Среди чисел 12, −15, 1, −3, 0, 6, −9 найдите:
а) целые положительные числа; б) целые отрицательные числа.
3) Верно ли, что любое целое число является либо положительным, либо отрицательным?

2 1) По какому правилу сравнивают целые числа?

2) Сравните числа:
а) 8 и −100; б) −8 и −10; в) −7 и 0.

3) Между какими ближайшими целыми числами находится число:
а) −99; б) −1?
Ответ запишите с помощью двойного неравенства.

4) Сравните числа a и b, если известно, что $a > 0$ и $b < 0$.

3 1) Что можно сказать о знаке суммы чисел a и b, если известно, что:
а) оба числа отрицательные;
б) одно число отрицательное, а другое положительное?
Для каждого случая приведите примеры.

2) Найдите сумму:
а) $(-15) + (-6)$; в) $(+14) + (-6)$;
б) $(+18) + (-18)$; г) $(+3) + (-22)$.

4 1) Как из одного целого числа вычесть другое?
Запишите правило вычитания с помощью букв.

2) Найдите разность:
а) $-15 - (-20)$; д) $0 - (-41)$;
б) $-6 - (+23)$; е) $-25 - (+20)$;
в) $16 - (-3)$; ж) $-20 - 30$;
г) $4 - (+12)$; з) $5 - 50$.

5 Объясните, как можно найти значение выражения $3 - 8 + 14 - 5 - 11$. Выполните вычисления.

6 1) Сформулируйте правила знаков при умножении и при делении.

2) Выполните умножение:
а) $-5 \cdot (-3)$; г) $10 \cdot (-1)$;
б) $0 \cdot (-6)$; д) $(-1) \cdot (-5) \cdot (-3)$;
в) $4 \cdot (-7)$; е) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-4)$.

3) Выполните деление:
а) $-32 : 8$; в) $42 : (-7)$;
б) $-54 : (-6)$; г) $0 : (-3)$.

глава 10

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

- КАКИЕ ЧИСЛА НАЗЫВАЮТ РАЦИОНАЛЬНЫМИ
- СРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МОДУЛЬ ЧИСЛА
- СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ
- УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ
- КООРДИНАТЫ

ИНТЕРЕСНО

Расширение представлений о числе сопровождало человечество на протяжении всей его истории. Большой вклад внесли в развитие понятия числа учёные Индии. Математик и астроном Брахмагупта ещё в VII в. широко использовал отрицательные числа — за много столетий до того, как они пришли в Европу. Замечательным вкладом индийских математиков в развитие теории чисел было введение понятия нуля и знака для него. Это столь привычное сегодня удивительное число позволило им создать десятичную систему записи чисел и разработать правила операций над записанными так числами.

39 КАКИЕ ЧИСЛА НАЗЫВАЮТ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какие числа называют рациональными
- Как изображают рациональные числа точками на координатной прямой

В предыдущей главе вы познакомились с целыми числами. Это натуральные числа 1, 2, 3, ..., противоположные им числа −1, −2, −3, ... и число 0. Но так же как, кроме натуральных чисел, существуют дробные числа, так и, кроме отрицательных целых чисел, существуют и отрицательные дробные числа.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА Отрицательные дробные числа используются и в математике, и в реальной жизни. Например, если убыток фирмы составил 1,5 млн р., то его удобно показать как отрицательную прибыль: −1,5 млн р. Или если популярность политического деятеля упала на 8,5%, то этот «отрицательный рост» можно записать так: −8,5%.

Положительные дробные числа, с которыми вы до сих пор имели дело, как и положительные целые числа, можно записывать со знаком «+»; например, +1,5 и 1,5 — это одно и то же число:

$$+1{,}5 = 1{,}5.$$

Отрицательные дробные числа, так же как и отрицательные целые, получаются приписыванием к положительному числу знака «−»:

$$-2{,}5,\ -\frac{2}{7},\ -100{,}75.$$

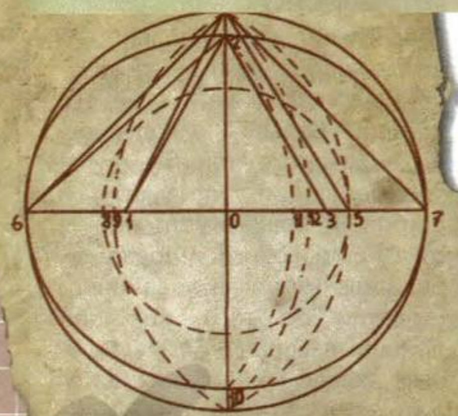
Числа, которые различаются только знаком, т. е. такие, как 5 и −5, $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$, 8,7 и −8,7, называют **противоположными** числами.

> **!** Целые и дробные числа вместе образуют множество рациональных чисел.

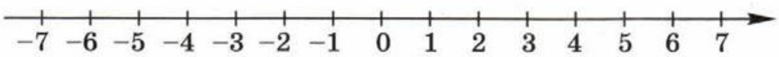
Так, $\frac{1}{3}$, $-\frac{22}{7}$, 0, 18,4, −148, 256 — это всё примеры рациональных чисел.

КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ Вы знаете, как отмечают на координатной прямой целые числа. Чтобы отметить, например, числа 1, 2, 3, 4, надо отложить вправо от нуля отрезки, длины которых равны 1, 2, 3, 4 единицам. А чтобы отметить на прямой числа −1, −2, −3, −4, надо отложить отрезки с длинами 1, 2, 3, 4 единицы влево от нуля.

Термин «рациональное число» происходит от латинского слова *ratio*. Существуют разные объяснения этого происхождения. Одно из них связано с тем, что слово *ratio* означает «разум». Математики Древней Греции обнаружили, что для измерения длин отрезков не хватает даже дробных чисел. Были «изобретены» новые числа (вы узнаете о них в старших классах), и их назвали иррациональными, т. е. «неразумными». А привычные числа в противопоставление новым назвали «разумными», рациональными.



На рисунке ***10.1*** изображена координатная прямая, отмеченные на ней числа являются целыми. Положительные целые числа расположены справа от нуля, отрицательные — слева.

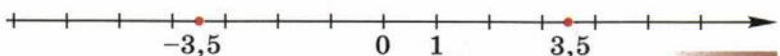


10.1

Между целыми числами на координатной прямой расположены дробные числа, на правом луче — положительные, на левом — отрицательные. Отметим на координатной прямой, например, числа 3,5 и −3,5:

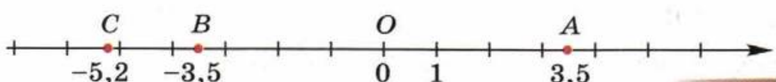
отложим от точки 0 вправо отрезок длиной 3,5 единицы, получим точку, изображающую число 3,5;

отложим от точки 0 влево отрезок такой же длины, получим точку −3,5 (рис. ***10.2***).



10.2

Таким же образом изображается на координатной прямой любое положительное или отрицательное число. Чтобы, например, отметить число −5,2, надо отложить влево от нуля отрезок, равный 5,2 единицы, получим точку, расположенную между числами −6 и −5 (рис. ***10.3***).



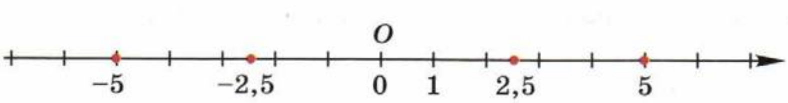
10.3

Числа 0; 3,5; −3,5 и −5,2 являются координатами точек O, A, B и C. Записывается это так:

$$O\,(0),\ A\,(3{,}5),\ B\,(-3{,}5),\ C\,(-5{,}2).$$

Противоположные числа изображаются точками координатной прямой, симметричными относительно точки O (0).

Например, числам 2,5 и −2,5 соответствуют точки, расположенные справа и слева от точки O на расстоянии, равном 2,5 единицы; числам 5 и −5 — точки, расположенные справа и слева от точки O на расстоянии, равном 5 единицам (рис. ***10.4***).



10.4

Если перед некоторым числом, положительным или отрицательным, поставить знак «+», то получится то же самое число:

$+(+2{,}3) = +2{,}3 = 2{,}3;$
$+(-2{,}3) = -2{,}3.$

Если поставить знак «−», то получится противоположное число:

$-(+2{,}3) = -2{,}3;$
$-(-2{,}3) = +2{,}3 = 2{,}3.$

Знак «−» употребляется не только для записи отрицательных чисел, но и для обозначения противоположного числа. Если обозначить некоторое число буквой a, то противоположное ему число будет иметь обозначение $-a$. Например, если $a = 1{,}2$, то $-a = -1{,}2$; если $a = -2{,}5$, то $-a = 2{,}5$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите примеры целых чисел, целых отрицательных чисел, дробных положительных чисел, дробных отрицательных чисел.
- Назовите число, противоположное числу: а) 12,8; б) −10.
- Расскажите, как изобразить на координатной прямой число 4; число −7; число 3,5; число −3,5.

УПРАЖНЕНИЯ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

599 Из чисел $\frac{2}{3}$; 2; −3,7; 0; 10; $-\frac{15}{8}$; $1\frac{3}{4}$; −80; 4,09; −5 выпишите:

1) положительные числа;
2) отрицательные числа;
3) целые числа;
4) дробные отрицательные числа.

600 Запишите:
а) пять отрицательных дробей со знаменателем 3;
б) пять отрицательных десятичных дробей с одним знаком после запятой;
в) пять чисел, расположенных между числами −1 и 0.

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА

601 Запишите число, противоположное каждому из следующих чисел:

$$-20;\ 35{,}4;\ -3\frac{1}{3};\ \frac{5}{12};\ -\frac{5}{12};\ 0{,}002.$$

602 Упростите запись:

а) $+(+10{,}1)$;
б) $+(-3{,}6)$;
в) $+\left(-\frac{3}{7}\right)$;
г) $-(+6{,}2)$;
д) $-(-1{,}4)$;
е) $-\left(-\frac{1}{20}\right)$.

603 Упростите запись:

а) $-(+(+34))$; б) $+(-(+15))$; в) $+(-(-57))$; г) $-(+(-60))$.

Образец. Раскрываем скобки по очереди, начиная с внутренних:

$$-(-(+17)) = -(-17) = +17 = 17.$$

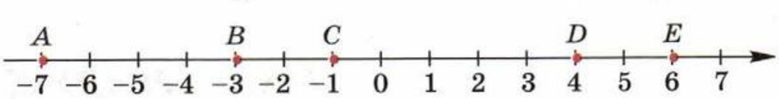
604 Как записать с помощью знака «−» число, противоположное числу a?
Чему равно $-a$, если $a = 1$? $a = 7{,}3$? $a = -\frac{1}{2}$? $a = -112{,}1$?
Образец. Если $a = 18$, то $-a = -18$.

605 Найдите неизвестное число x:

а) $-x = 7\frac{2}{3}$; б) $-x = -2{,}8$; в) $-(-x) = -1{,}5$; г) $-(-x) = 100$.

КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

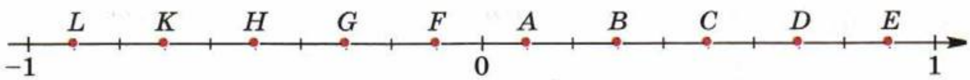
606 Запишите координаты точек, отмеченных на координатной прямой.



607 Начертите координатную прямую. Отметьте на ней точками данное число и число, ему противоположное: а) 1; 3; 5; 7; б) −3; −5; −7; −8.

608 Отметьте на координатной прямой целые числа, заключённые между числами: а) −2 и 5; б) −9 и 0; в) −30 и −20.

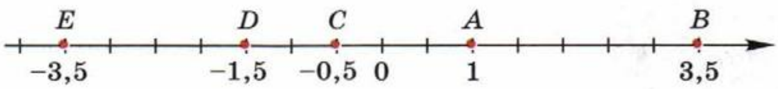
609 На координатной прямой отмечены точки. Запишите их координаты.



610 а) Начертите координатную прямую с единичным отрезком, равным 6 клеткам. Отметьте на ней точками числа $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, -1, $-1\frac{1}{2}$.

б) Начертите координатную прямую (единичный отрезок — 2 клетки) и отметьте на ней числа 0,5; 1,5; 2,5; −0,5; −1; −3; −3,5; −4,5.

611 На координатной прямой отмечены точками некоторые числа. Перенесите рисунок в тетрадь и отметьте точками противоположные им числа. Выпишите пары точек, координатами которых являются противоположные числа.



612 Определите, какая из данных точек расположена на координатной прямой дальше от начала координат:

а) A (20) или B (75);
б) A (−16) или B (−25);
в) A (−30) или B (15);
г) A (−12) или B (52);
д) A (−0,8) или B (0,8);
е) $A\left(-\frac{1}{7}\right)$ или $B\left(-\frac{1}{2}\right)$.

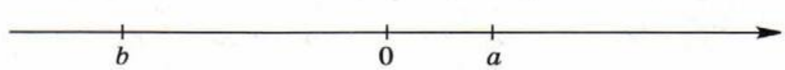
613 Выпишите все десятичные дроби с одним знаком после запятой, которые на координатной прямой изображаются точками, лежащими между:

а) A (6,1) и B (6,9);
б) A (−2,7) и B (−2,2);
в) A (−0,5) и B (0,5).

614 На координатной прямой отмечены числа a и b (рис. ***10.5***).

а) Определите, какое из этих чисел положительное и какое отрицательное.

б) Как с помощью циркуля отметить на прямой числа $-a$ и $-b$? Перенесите рисунок в тетрадь и выполните нужные построения.



10.5

40 СРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МОДУЛЬ ЧИСЛА

ВЫ УЗНАЕТЕ

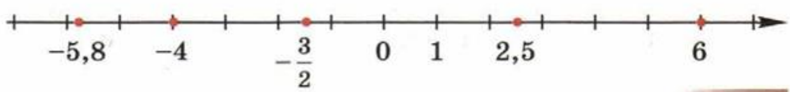
- Как сравнить любые два рациональных числа
- Что такое модуль числа
- Как найти модуль рационального числа

Вы уже умеете сравнивать любые положительные числа, можете сравнить два целых числа. А теперь вы научитесь сравнивать любые рациональные числа.

СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

Естественно считать, как и раньше, что из двух чисел меньше то, которому на координатной прямой соответствует точка, расположенная левее, а больше то, которому соответствует точка, расположенная правее.

Отрицательные числа на координатной прямой отмечаются точками, расположенными левее нуля, а положительные — точками, расположенными правее нуля. Например, на рисунке ***10.6*** вы видите координатную прямую, на которой отмечено несколько положительных и отрицательных чисел.



10.6

Можно сделать следующий вывод:

! Любое отрицательное число меньше нуля.
Любое положительное число больше нуля.
Любое отрицательное число меньше любого положительного числа.

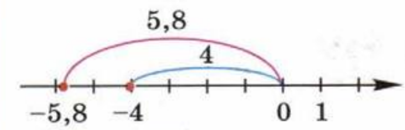
Например:

$-5{,}8 < 0$; $2{,}5 > 0$; $-5{,}8 < 2{,}5$; $1 > -\frac{3}{2}$.

Если a — отрицательное число, то $a < 0$. Верно и обратное: если $a < 0$, то оно отрицательное. Поэтому утверждения «a — отрицательное число» и «$a < 0$» означают одно и то же.
Точно так же одно и то же означают утверждения «a — положительное число» и «$a > 0$».

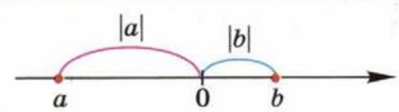
Для сравнения двух отрицательных чисел также обратимся к координатной прямой. Сравним, например, числа −5,8 и −4 (рис. ***10.6***). Точка −5,8 расположена левее точки −4, поэтому $-5{,}8 < -4$. Однако мы могли прийти к такому же выводу и не обращаясь к рисунку. Действительно, точка −5,8 удалена от начала координат на 5,8 единицы, а точка −4 — на 4 единицы. Это значит, что точка −5,8 расположена левее, т. е. $-5{,}8 < -4$.

ЧТО ТАКОЕ МОДУЛЬ ЧИСЛА Чтобы выяснить, какое из двух отрицательных чисел $-5{,}8$ и -4 меньше, мы сравнили положительные числа 5,8 и 4 — расстояния от нуля до соответствующих точек координатной прямой. Расстояние от точки координатной прямой, изображающей некоторое число, до нуля иначе называют **модулем** этого числа (ещё говорят «абсолютная величина»). Модуль числа $-5{,}8$ равен 5,8; модуль числа -4 равен 4.



Используя термин «модуль», можно рассмотренный выше способ сравнения отрицательных чисел сформулировать в виде правила:

Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого модуль больше.



Понятно, что модуль положительного числа — это само это число. Например, модуль числа 2,5 равен 2,5, так как число 2,5 удалено от начала отсчёта на 2,5 единицы. Получить модуль отрицательного числа тоже легко — достаточно просто отбросить знак «минус». А модуль числа 0 равен 0, так как число 0 находится на «нулевом» расстоянии от самого себя.

Таким образом:

Модуль положительного числа равен самому числу.
Модуль отрицательного числа равен числу, ему противоположному.
Модуль нуля равен нулю.

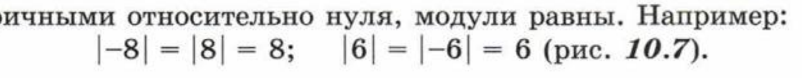
Для модуля есть специальное обозначение. Если a — некоторое число, то его модуль обозначают символом $|a|$. Например, пишут:

$$|-5{,}8| = 5{,}8;\ |-4| = 4;\ |2{,}5| = 2{,}5;\ |0| = 0.$$

Ясно, что модуль может быть только положительным числом или нулём.

Чем дальше от нуля точка, изображающая некоторое число, тем больше модуль этого числа. А у противоположных чисел, которые изображаются точками, симметричными относительно нуля, модули равны. Например:

$$|-8| = |8| = 8; \quad |6| = |-6| = 6 \text{ (рис. } \textbf{\textit{10.7}}\text{)}.$$



10.7

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какое число больше: положительное или нуль? отрицательное или нуль? положительное или отрицательное?
- Покажите с помощью координатной прямой, как сравнить числа $-6{,}5$ и -8. Сформулируйте правило сравнения двух отрицательных чисел.
- Назовите числа, модуль которых равен 3, и изобразите эти числа на координатной прямой.
- Как найти модуль положительного числа? отрицательного числа? Приведите примеры. Чему равен модуль числа 0?

УПРАЖНЕНИЯ

СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

615 На рисунке ***10.8*** схематически показано, как расположены на координатной прямой относительно друг друга числа $-12{,}5$ и -5. Покажите, как расположены на координатной прямой относительно друг друга данные числа, и сравните их:

а) 8 и -6; б) 6 и -8; в) $-5{,}4$ и -10; г) $-\frac{2}{3}$ и $-3\frac{1}{3}$.

10.8

616 Сравните числа с нулём, результат запишите с помощью знака > или <:

126; -99; $5\frac{1}{7}$; $-15{,}6$; $-2{,}015$; $0{,}001$.

617 Сравните числа и запишите результат с помощью знака > или <:

а) 39 и -74; -18 и 20; -24 и 3; 120 и -120;

б) $\frac{1}{6}$ и $-\frac{5}{6}$; $-\frac{3}{7}$ и $\frac{1}{8}$; $-4\frac{1}{3}$ и $2\frac{1}{5}$; $11\frac{3}{4}$ и $-29\frac{1}{2}$;

в) $2{,}8$ и $-1{,}5$; $-25{,}14$ и 25; $132{,}1$ и $-156{,}7$; $-17{,}02$ и $17{,}02$.

618 Какое из чисел расположено на координатной прямой левее, какое из них меньше:

а) -7 или -10; в) $-6{,}5$ или $-6{,}9$; д) $-4\frac{1}{2}$ или $-4\frac{1}{100}$;

б) $-8{,}7$ или $-5{,}1$; г) $-0{,}9$ или $-0{,}09$; е) $-\frac{1}{7}$ или $-\frac{5}{7}$?

619 Между какими соседними целыми числами заключено число: $-0{,}5$; $-2\frac{2}{9}$; $-90{,}7$; $-64\frac{4}{7}$? Запишите ответ в виде двойного неравенства.

Подсказка. Изобразите схематически на координатной прямой данное число и ближайшие к нему слева и справа целые числа, затем запишите двойное неравенство, например $-16 < -15{,}3 < -15$.

620 На координатной прямой изображены числа a, b и c (рис. ***10.9***, *а, б*). Сравните с нулём каждое из чисел a, b и c; сравните числа a и c, a и b, b и c.

10.9

621 На координатной прямой точками отмечены числа a, b и c. Какое из следующих утверждений об этих числах верно?

1) $a > 0,\ a < b < c$
2) $c < 0,\ a < b < c$
3) $a > 0,\ c < b < a$
4) $c < 0,\ c < a < b$

МОДУЛЬ ЧИСЛА

622 Назовите модуль числа. Запишите соответствующие равенства с помощью знака модуля и прочитайте их:

а) -5; 7; 85; -29; -250; 194; б) $-5{,}6$; $5{,}6$; $-2\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{4}$; $0{,}35$; $-0{,}35$.

623 Начертите координатную прямую и отметьте на ней точками числа, модули которых равны 4; 2; 1,5; 0.

624 Сравните:

а) $|-3|$ и $|3|$; б) $|50|$ и $|-100|$; в) $|4{,}3|$ и $|-2{,}4|$; г) $\left|-\frac{3}{4}\right|$ и $\left|-\frac{1}{5}\right|$.

625 Сравните числа;
а) -5 и -10; -12 и -120; -400 и -230; -59 и -60;
б) $-2{,}5$ и $-8{,}5$; $-12{,}2$ и $-11{,}2$; $-\frac{2}{3}$ и -1; $-\frac{7}{6}$ и $-\frac{2}{5}$.

626 Расположите числа в порядке возрастания, ответ запишите в виде двойного неравенства:
а) 23; -10; 0; б) $1{,}8$; 0; $-1{,}8$; в) $3{,}5$; $-3{,}2$; $1{,}5$; г) $1{,}3$; $-2{,}7$; -1.

Образец. $-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2}$.

627 Расположите в порядке возрастания числа:

а) -54; 0; -7; 12; 1; в) $-2\frac{1}{3}$; -7; 1; $1\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$;

б) 120; -120; 40; -40; 0; г) $-0{,}101$; $-0{,}1101$; $-0{,}01011$; $-0{,}011$.

628 Существуют ли такие значения x, при которых выполняется данное равенство? Если существуют, то назовите их:
а) $|x| = 10$; б) $|x| = 7{,}6$; в) $|x| = 0$; г) $|x| = -15$.

629 1) Приведите примеры чисел, модуль которых равен 12; больше 12; меньше 12.
2) Пусть a — это некоторое число. Покажите на координатной прямой, где могут располагаться точки, изображающие это число, если известно, что:
а) $|a| = 6$; б) $|a| < 6$; в) $|a| > 6$.

41 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Правила сложения отрицательных чисел
- Правила сложения чисел разных знаков
- Правила вычитания чисел

Вы уже умеете складывать, вычитать, умножать и делить целые числа. Рассматривая правила выполнения этих действий, мы опирались на жизненный опыт — примеры ситуаций с доходами и расходами, с выигрышными и проигрышными очками. Теперь эти правила можно сформулировать более точно, используя понятие модуля числа.

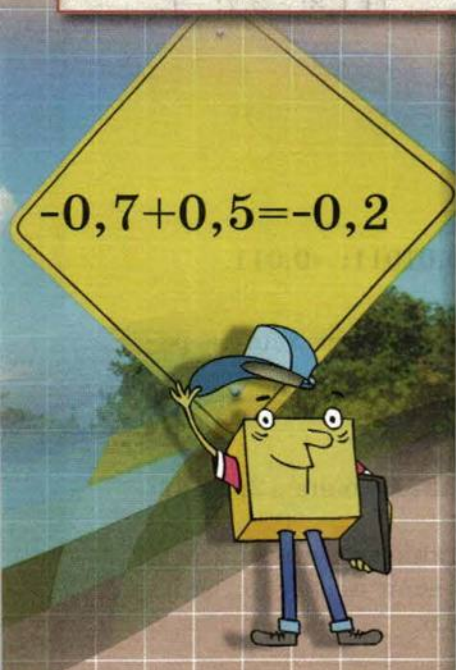
СЛОЖЕНИЕ Вспомните, как мы поступали при сложении целых чисел. Пусть требуется сложить два отрицательных числа, например -5 и -9. Сначала надо определить знак суммы — она будет отрицательна, а затем сложить 5 и 9, т. е., как вы теперь знаете, модули чисел -5 и -9: $(-5) + (-9) = -14$.

Сложим теперь числа разных знаков, например -8 и $+3$. Для нахождения суммы надо из 8 вычесть 3 и поставить перед результатом знак числа -8, т. е. того слагаемого, модуль которого больше:

$$(-8) + (+3) = -5.$$

Таким образом, можно сформулировать следующие правила сложения:

! Сумма двух чисел одного знака имеет тот же знак, что и слагаемые. Чтобы найти модуль суммы, надо сложить модули слагаемых.
Сумма двух чисел разных знаков имеет знак того слагаемого, у которого модуль больше. Чтобы найти модуль суммы, нужно из большего модуля вычесть меньший.



Эти правила справедливы для любых рациональных чисел. Обратите внимание: в каждом правиле выделяются два момента — сначала определяют знак суммы, а затем находят её модуль.

Пример 1. Вычислим сумму $-\frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{5}\right)$.

Сумма двух отрицательных чисел отрицательна, поэтому сначала запишем знак «минус», а затем сложим $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$:

$$-\frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) = -\left(\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{15}\right) = -\frac{19}{15} = -1\frac{4}{15}.$$

Пример 2. Найдём сумму $0,3 + (-0,7)$.

У отрицательного слагаемого модуль больше, поэтому сумма отрицательна; чтобы найти её модуль, вычтем 0,3 из 0,7:

$$0,3 + (-0,7) = -(0,7 - 0,3) = -0,4.$$

Действие сложения рациональных чисел обладает теми же свойствами, что и действие сложения целых чисел. Для него справедливы переместительное и сочетательное свойства, и это позволяет в любой сумме произвольным образом переставлять числа и объединять их в группы.
Сумма противоположных чисел равна нулю.
Правило сложения рационального числа с нулём такое же, как и для целых чисел.

Для любых чисел a и b:
$a + b = b + a$.
Для любого числа a:
$a + (-a) = 0$;
$a + 0 = 0 + a = a$.

ВЫЧИТАНИЕ Как вы знаете, вычитание целых чисел сводится к их сложению:

$$-20 - (-15) = -20 + 15 = -5.$$

Так же поступают и при вычитании любых рациональных чисел.

Чтобы вычесть из одного числа другое, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Пример 3. Найдём разность $(-1{,}5) - 0{,}9$.

Заменим число $0{,}9$ на противоположное число $(-0{,}9)$ и выполним сложение, воспользовавшись правилом сложения отрицательных чисел:

$$(-1{,}5) - 0{,}9 = (-1{,}5) + (-0{,}9) = -(1{,}5 + 0{,}9) = -2{,}4.$$

Пример 4. Найдём разность $\frac{1}{4} - \frac{3}{2}$.

Заменим вычитание числа $\frac{3}{2}$ прибавлением противоположного числа $-\frac{3}{2}$ и воспользуемся правилом сложения чисел разных знаков:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}.$$

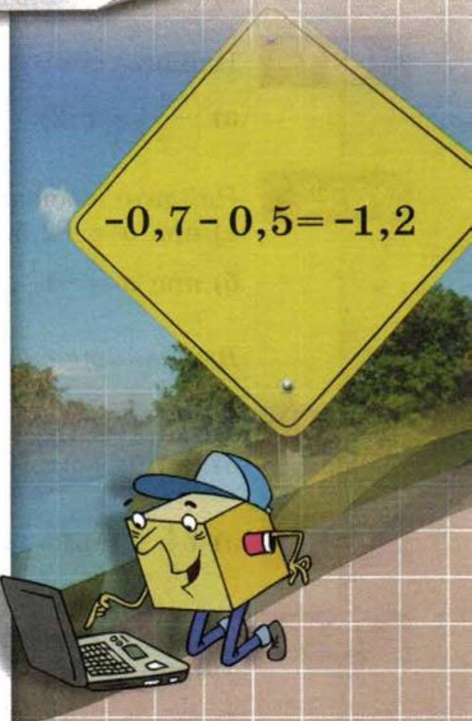
Пример 5. Найдём значение выражения

$$-0{,}4 + 1{,}8 - 2{,}3 + 0{,}5.$$

Это сумма четырёх слагаемых: $-0{,}4$; $+1{,}8$; $-2{,}3$; $+0{,}5$. Вычислим её:

$$-0{,}4 + 1{,}8 - 2{,}3 + 0{,}5 = -2{,}7 + 2{,}3 = -0{,}4.$$

Сначала мы нашли отдельно сумму отрицательных и сумму положительных слагаемых, а затем сумму двух получившихся чисел.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте правило сложения отрицательных чисел. Проиллюстрируйте его на примере сложения чисел $-4{,}3$ и $-6{,}5$.
- Сформулируйте правило сложения чисел разных знаков. Проиллюстрируйте его на примере сложения чисел $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.
- Объясните, как заменить сложением вычитание числа $-3{,}5$ из числа -10. Запишите соответствующее равенство и выполните вычисление.

УПРАЖНЕНИЯ

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ

630 Выполните сложение:

а) $(-3{,}5) + (-5)$;
б) $(-6{,}5) + (-2)$;
в) $(-10) + (-1{,}4)$;
г) $(-16) + (-2{,}5)$;
д) $(-0{,}4) + (-0{,}5)$;
е) $(-4{,}2) + (-2{,}8)$;
ж) $(-6{,}15) + (-0{,}5)$;
з) $(-0{,}7) + (-2{,}23)$.

631 Найдите сумму:

а) $\left(-\frac{1}{3}\right) + (-2)$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$; в) $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$.

632 Найдите значение выражения $a + b$:

а) при $a = -2{,}5$, $b = -7$;
б) при $a = -1\frac{1}{2}$, $b = -4$;
в) при $a = -10{,}2$, $b = -0{,}6$;
г) при $a = -3\frac{1}{3}$, $b = -0{,}5$.

Выполните сложение (№ 633, 634).

633 а) $5{,}3 + (-4)$; б) $(-6{,}9) + 1$; в) $(-10{,}7) + 2{,}3$; г) $12{,}6 + (-2{,}3)$; д) $5{,}4 + (-10)$; е) $(-8) + 5{,}5$; ж) $6{,}3 + (-7{,}2)$; з) $3{,}1 + (-7{,}2)$.

634 а) $7\frac{1}{2} + (-5)$; б) $5\frac{5}{6} + \left(-3\frac{1}{6}\right)$; в) $\left(-2\frac{3}{4}\right) + 2$; г) $\frac{3}{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)$.

635 Найдите значение выражения $a + b$:

а) при $a = -5$, $b = 12$;
б) при $a = 7$, $b = -1{,}6$;
в) при $a = 0$, $b = -5{,}4$;
г) при $a = -\frac{5}{12}$, $b = 0{,}75$.

636 Подберите и подставьте вместо многоточия такое число, чтобы получилось верное равенство:

а) $-6 + \ldots = -8$;
б) $-6{,}5 + \ldots = -10{,}5$;
в) $\ldots + (-3{,}9) = -13{,}9$;
г) $\ldots + (-5{,}8) = -6$.

ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

637 Запишите равенство, заменив вычитание сложением:

а) $-15 - (-10)$;
б) $24 - (+26)$;
в) $12 - 20$;
г) $-8 - 16$;
д) $a - (+b)$;
е) $a - (-b)$.

638 Вычислите, заменив вычитание сложением:

а) $5{,}7 - (-1{,}1)$;
б) $(-6{,}9) - (-10{,}3)$;
в) $-8{,}75 - (+6{,}25)$;
г) $-\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)$;
д) $\frac{5}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right)$;
е) $0 - \left(+\frac{8}{15}\right)$.

639 Найдите значение выражения $a - b$:

а) при $a = 5$, $b = -\frac{2}{11}$;
б) при $a = -2$, $b = -1{,}7$;
в) при $a = -0{,}12$, $b = -0{,}1$;
г) при $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2{,}5$.

640 Вычислите:

а) $20 - 30$;
б) $\frac{2}{3} - \frac{7}{3}$;
в) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{10}$;
г) $2{,}6 - 5{,}2$;
д) $-0{,}4 - 1{,}4$;
е) $1{,}9 - 5{,}9$.

641 Решите уравнение:

а) $x + 21 = 7$;
б) $32 + x = -25$;
в) $x + 12{,}5 = -7{,}5$;
г) $15{,}2 + x = 2{,}3$;
д) $x - 8{,}9 = -5$;
е) $12{,}5 - x = -10$.

НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ

642 Вычислите устно:

а) $-1 + 0{,}7$; $-3 + 1{,}3$; $-5 + 4{,}2$; $-4 + 3{,}5$;
б) $-0{,}6 + 4$; $-0{,}4 + 1$; $-0{,}1 + 1$; $-0{,}7 + 1$;
в) $-0{,}7 - 2{,}8$; $1{,}3 - 2{,}7$; $-5{,}8 + 3{,}3$; $-0{,}6 + 1{,}1$;
г) $-0{,}5 - 6{,}4$; $3{,}8 - 10$; $-0{,}2 - 1{,}9$; $-4{,}5 + 3{,}1$.

643 Найдите значение выражения:

а) $0{,}7 - 0{,}2 - 1{,}6 + 0{,}3 - 0{,}4$;
б) $-3 + 0{,}9 - 1{,}4 - 0{,}2 + 6{,}1$;
в) $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$;
г) $-\frac{2}{5} - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}$.

644 Найдите значение выражения $a - b + c$:

а) при $a = 0$, $b = 20{,}7$, $c = -10{,}3$;
б) при $a = -10$, $b = -5{,}5$, $c = 2{,}5$;
в) при $a = 1{,}2$, $b = 4{,}8$, $c = -4{,}2$;
г) при $a = 0{,}7$, $b = -10$, $c = -5$.

645 Найдите значения выражений $a - b$ и $b - a$ при $a = 11$, $b = 5$; при $a = -6$, $b = 1$; при $a = -0{,}4$, $b = -0{,}9$; при $a = 0$, $b = -1{,}2$.
Какую закономерность вы заметили?

646 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1) Найдите значение суммы $12 - 14 + 5 - 10$.
2) Измените знак перед каждым слагаемым на противоположный и найдите значение нового выражения. Что вы заметили?
3) Используя полученный результат, запишите выражение, значение которого противоположно данному выражению:

а) $-15 + 8$;
б) $-360 - 290$;
в) $-1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 18 + 27$;
г) $10 - 15 + 11 - 107 - 38 - 18$.

42 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Правила умножения и деления рациональных чисел одного знака и разных знаков
- Какие существуют способы записи отрицательных дробей

Используя понятие модуля числа, сформулируем правила умножения положительных и отрицательных чисел.

УМНОЖЕНИЕ Рассмотрим несколько знакомых примеров умножения целых чисел:

$$(-5) \cdot (-6) = 30; \quad (-4) \cdot 8 = -32; \quad 6 \cdot (-3) = -18.$$

Сначала, пользуясь правилами знаков, определяют знак произведения, а затем перемножают модули множителей. Точно так же поступают и в случае любых рациональных чисел.

Произведение двух чисел одного знака положительно, а произведение двух чисел разных знаков отрицательно.
Чтобы найти модуль произведения, нужно перемножить модули множителей.

Пример 1. $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = -\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9}\right) = -\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 9} = -\frac{1}{3}.$

Умножение рациональных чисел, так же как и целых, обладает переместительным и сочетательным свойствами, что позволяет в любом произведении произвольным образом переставлять числа и объединять их в группы.

Как вы уже поняли, действие умножения рациональных чисел обладает всеми теми же свойствами, что и умножение целых чисел. Кроме переместительного и сочетательного свойств, справедливо распределительное свойство умножения относительно сложения. Сохраняются свойства нуля и единицы при умножении. При умножении на -1 число заменяется на противоположное.

Пример 2. Вычислим произведение

$$-2{,}5 \cdot (-7{,}8) \cdot (-4).$$

Вычисления будут проще, если в произведении переставить множители:

$$-2{,}5 \cdot (-7{,}8) \cdot (-4) = -2{,}5 \cdot (-4) \cdot (-7{,}8) =$$
$$= -(2{,}5 \cdot 4 \cdot 7{,}8) = -(10 \cdot 7{,}8) = -78.$$

ДЕЛЕНИЕ Вспомним, как мы делили целые числа:

$$(-25) : (-5) = 5; \quad (-12) : 3 = -4; \quad 18 : (-6) = -3.$$

Точно так же поступают и в случае любых рациональных чисел. Сформулируем правило деления рациональных чисел.

Частное двух чисел одного знака положительно, а частное двух чисел разных знаков отрицательно.
Чтобы найти модуль частного, надо модуль делимого разделить на модуль делителя.

Пример 3. $(-5{,}4) : (-0{,}9) = 5{,}4 : 0{,}9 = 6.$

Пример 4. $\left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{4}{3} = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$

ЧТО МОЖНО ДЕЛАТЬ СО ЗНАКОМ «–» ПЕРЕД ДРОБЬЮ

Рассмотрим частные $(-5) : 6$ и $5 : (-6)$. Каждое из них равно отрицательному числу $-\frac{5}{6}$. С другой стороны, каждое из этих частных можно записать с помощью дробной черты:

$$(-5) : 6 = \frac{-5}{6}; \qquad 5 : (-6) = \frac{5}{-6}.$$

Таким образом, $-\frac{5}{6} = \frac{-5}{6} = \frac{5}{-6}.$

Вы видите, что при записи отрицательных дробей «–» можно ставить перед дробью, вносить его в числитель или в знаменатель.

Это часто используется при выполнении действий с дробями, делая вычисления более простыми.

Пример 5. Найдём значение выражения $-\frac{4}{9} + \frac{5}{12}.$

Используя описанное свойство, можно действовать, не выясняя, модуль какого из данных дробных чисел больше:

$$-\frac{4}{9} + \frac{5}{12} = \frac{-4^{\backslash 4}}{9} + \frac{5^{\backslash 3}}{12} = \frac{-4 \cdot 4}{36} + \frac{5 \cdot 3}{36} =$$
$$= \frac{-16}{36} + \frac{15}{36} = \frac{-16+15}{36} = \frac{-1}{36} = -\frac{1}{36}.$$

Пример 6. Найдём значение выражения $-\frac{2}{5} - \frac{3}{4}.$

Сначала приведём дроби к общему знаменателю, а затем воспользуемся непосредственно правилом вычитания дробей с равными знаменателями:

$$-\frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{-8}{20} - \frac{15}{20} =$$
$$= \frac{-8-15}{20} = \frac{-23}{20} = -\frac{23}{20} = -1\frac{3}{20}.$$

Возьмём несколько рациональных чисел и представим каждое из них в виде дроби, у которой числитель — целое число, знаменатель — натуральное: $6 = \frac{6}{1}$, $-8 = \frac{-8}{1}$, $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$, $0 = \frac{0}{4}$. Вы видите, что такие разные на первый взгляд числа можно записать в одном и том же виде. Вообще любое рациональные число может быть представлено в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное.

Для любых чисел a и b:
$a \cdot b = b \cdot a.$
Для любых чисел a, b и c:
$a(bc) = (ab)c;$
$a(b + c) = ab + ac.$
Для любого числа a:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$
$-1 \cdot a = -a.$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой знак имеет произведение чисел одного знака? разных знаков?
- На примере $-0{,}2 \cdot (-5)$ объясните, как умножают числа одного знака.
- На примере $-0{,}9 \cdot 0{,}5$ объясните, как умножают числа разных знаков.
- Какой знак имеет частное чисел одного знака? разных знаков?
- На примерах $-3{,}5 : (-7)$ и $4{,}5 : (-3)$ объясните, как выполняют деление чисел одного знака и разных знаков.

УПРАЖНЕНИЯ

УМНОЖЕНИЕ

647 Найдите произведение:

а) $-4{,}2 \cdot (-2)$; в) $1{,}4 \cdot (-4)$; д) $-\frac{1}{3} \cdot 4$; ж) $-\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$;

б) $-3{,}3 \cdot (-3)$; г) $-5{,}1 \cdot 0{,}4$; е) $\frac{2}{7} \cdot (-5)$; з) $-\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$.

648 Вычислите: а) $-1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$; б) $2\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{3}{22}\right)$; в) $-1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$; г) $-2\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right)$.

649 Подберите число и подставьте его вместо многоточия так, чтобы получилось верное равенство:

а) $-8 \cdot ... = -0{,}8$; в) $... \cdot (-5{,}7) = 5{,}7$; д) $-17{,}3 \cdot ... = 0$;

б) $3{,}1 \cdot ... = -6{,}2$; г) $... \cdot (-8{,}9) = -8{,}9$; е) $-1{,}6 \cdot ... = 16$.

650 Сравните с нулём:

а) $8{,}9 \cdot (-16{,}7)$; б) $(-2{,}7) \cdot (-3{,}1) \cdot (-2{,}5)$; в) $(-5{,}1) \cdot 3{,}9 \cdot (-6{,}3)$.

651 Найдите значение выражения ab:

а) при $a = -7$, $b = -4$; в) при $a = 2{,}5$, $b = -1$;

б) при $a = -2{,}4$, $b = -10$; г) при $a = -4{,}9$, $b = 0$.

652 Найдите значение выражения:

а) $-2x$, если $x = 15$; $x = -5{,}5$; $x = 0{,}8$; $x = -\frac{5}{6}$;

б) $0{,}5c$, если $c = -48$; $c = -1{,}6$; $c = 2{,}4$; $c = -0{,}1$.

653 Найдите значение степени: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; в) $(-0{,}2)^2$; г) $(-0{,}5)^3$.

654 Сравните с нулём: а) $(-6)^{10}$; б) $(-15)^5$; в) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{12}$; г) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{15}$.

ДЕЛЕНИЕ

655 Положительным или отрицательным является частное:

а) $(-4{,}5) : (-9)$; б) $125{,}5 : (-2{,}5)$; в) $\frac{-75}{2{,}5}$; г) $\frac{-120}{-1{,}2}$?

656 Выполните деление:

а) $12{,}6 : (-4)$; в) $-1 : 2{,}5$; д) $0{,}48 : (-8)$; ж) $20{,}9 : (-1)$;

б) $-5 : (-2{,}5)$; г) $-14{,}4 : 1{,}2$; е) $-15{,}9 : (-15{,}9)$; з) $0 : (-17{,}3)$.

657 Вычислите:

а) $-\frac{4}{9} : 4$; б) $-\frac{3}{8} : (-3)$; в) $\frac{4}{9} : \left(-\frac{2}{7}\right)$; г) $-\frac{11}{3} : \left(-\frac{5}{6}\right)$; д) $-1 : \left(-\frac{2}{3}\right)$.

658 Найдите значение выражения:

а) $\frac{-18}{12}$; б) $\frac{-12}{-36}$; в) $\frac{48}{-64}$; г) $\frac{-45}{-75}$; д) $\frac{2,5}{-1,5}$; е) $\frac{-7,2}{-4,8}$.

659 Найдите значение выражения $\frac{a}{b}$:

а) при $a = -3$, $b = 2$; б) при $a = 7,6$, $b = -0,2$; в) при $a = -2,1$, $b = -8,4$.

660 Решите уравнение:

а) $3x = -4,08$; б) $-2x = 75$; в) $-5x = -0,45$; г) $0,2x = -2,8$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ

661 В каких случаях все три дроби равны:

1) $-\frac{2}{7}, \frac{2}{-7}, \frac{-2}{7}$; 2) $-\frac{3}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{-4}$; 3) $\frac{-1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{-8}$?

662 Используя приём, показанный в примерах 5 и 6 (с. 197) , вычислите:

а) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; б) $-\frac{5}{8} - \frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{9} - \frac{2}{3}$; д) $-\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; е) $-\frac{11}{12} + \frac{2}{3}$.

663 Определите порядок действий и найдите значения выражений:

а) $-2 \cdot (-2,5) - 2,6$ и $-2 \cdot (-2,5 - 2,6)$; б) $-\frac{5}{6} + 5 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right)$ и $\left(-\frac{5}{6} + 5\right) \cdot \left(-\frac{2}{15}\right)$.

Найдите значение выражения (№ 664—666).

664 а) $5,5 - (-0,9) \cdot 3 - 10,1$; в) $0,8 - 1,5 \cdot 1,4 + 2,3$;
б) $-2,8 : (1,6 - 1,2) + 3,4$; г) $(-1,9 - 0,3) : (-2,6 + 3,1)$.

665 а) $\frac{-1,5 + (-1)}{-1,5 - (-1)}$; б) $\frac{1,5 - (-3,5)}{1,5 + (-3,5)}$; в) $\frac{-2,5 + 0,4}{-2,5 \cdot 0,4}$; г) $\frac{-0,5 \cdot (-0,6)}{-0,5 - 0,6}$.

666 а) $\frac{1,2 - 3,1 + 0,8}{0,01}$; б) $\frac{-1,5 + 3,2 - 0,5}{-0,3}$.

667 Известно, что $a = 0,2$, $b = 7,5$. Найдите:
ab; $-ab$; $(-a) \cdot (-b)$; $(-a) \cdot b$; $a \cdot (-b)$.

668 Известно, что $x < 0$, $y < 0$. Сравните с нулём:

а) xy; б) $(-x) \cdot (-y)$; в) $x + y$; г) $(-x) + (-y)$; д) $\frac{x}{y}$; е) $\frac{-x}{y}$.

669 На координатной прямой точками отмечены числа a и b.

Определите:
1) модуль какого из чисел, a или b, больше;
2) положительным или отрицательным является значение выражения:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) $b - a$; г) ab; д) $\frac{a}{b}$.

43 КООРДИНАТЫ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Как определять положение точки на плоскости
- Что такое прямоугольная система координат
- Что такое координаты точки на плоскости

Вы, наверное, слышали в жизни такую фразу: «Оставь мне свои координаты». Это выражение означает, что собеседника просят оставить свой номер телефона или адрес, которые и считаются в этом случае координатами, по которым его можно будет найти.

ЧТО ТАКОЕ КООРДИНАТЫ Суть координат, или, как говорят обычно, системы координат, состоит в том, что это правило, по которому определяется положение того или иного объекта в пространстве.

Системы координат пронизывают всю практическую жизнь человека. Это, например, уже упомянутые почтовые адреса и телефоны. Вы встречаетесь с системой координат в зрительном зале кинотеатра (номер ряда и номер места), в поезде (номер вагона и номер места), с системой географических координат (долгота и широта) и т. п.

Те из вас, кто играл в морской бой, пользовались при этом соответствующей системой координат. Каждая клетка на игровом поле определяется двумя координатами — буквой и цифрой (рис. ***10.10***).

10.10

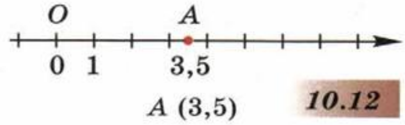
Аналогичная система координат используется в шахматах, горизонтали на шахматной доске всегда обозначаются цифрами, а вертикали — латинскими буквами (рис. ***10.11***). С помощью этих координат можно записать ход любой шахматной партии.

10.11

Похожие «клеточные» координаты обычно используются на военных, морских, геологических картах. Применяются они и на туристических схемах городов для облегчения поиска нужной улицы или достопримечательности.

Идея координат зародилась в глубокой древности. Их изобретение было вызвано потребностью в создании небесных и географических карт. Долготой и широтой в качестве географических координат пользовался древнегреческий астроном Птолемей (II в. н. э.). Квадратная сетка, играющая роль координат, была обнаружена на стене одной древнеегипетской гробницы. Прямоугольной сеткой для разметки холста пользовались и художники Возрождения.

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ Вы знаете, что если точка A изображает на координатной прямой некоторое число, например 3,5, то число 3,5 называют координатой точки A и оно определяет положение точки A на прямой (рис. ***10.12***). А как указать положение точки на плоскости?



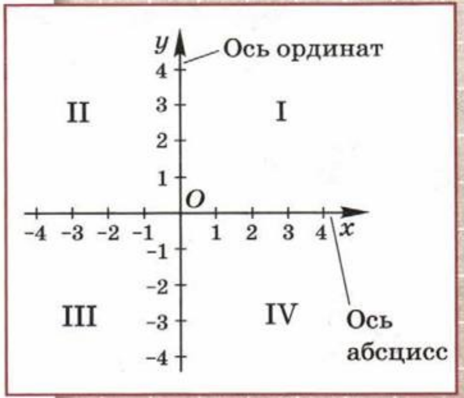
10.12

Для этого на плоскости чертят две перпендикулярные координатные прямые; обычно одну из них располагают горизонтально, а другую — вертикально (рис. ***10.13***). Точка их пересечения O — это начало отсчёта на каждой координатной прямой, её называют **началом координат**, а координатные прямые называют **осями координат**. Положительное направление на каждой оси показывают стрелкой: на горизонтальной оси это направление слева направо, а на вертикальной — снизу вверх. Единичные отрезки на обеих осях, как правило, одинаковы.

Горизонтальную ось обычно называют **осью x** или **осью абсцисс**; вертикальную — **осью y** или **осью ординат.** Плоскость, на которой задана система координат, называют **координатной плоскостью**. Координатная плоскость разбивается осями на четыре **координатные четверти.** Их нумеруют против часовой стрелки, начиная с правой верхней четверти.

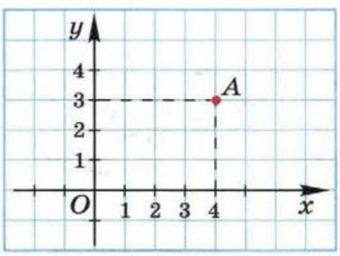
Эта система координат называется **прямоугольной** или **декартовой** по имени французского философа и математика Рене Декарта, который первым ввел её в 1637 г.

Положение точки на координатной плоскости определяется парой чисел — её **координатами**. Покажем, как находят координаты точки, например точки A (рис. ***10.14***). Опустим из точки A перпендикуляры на оси x и y. Первый «попадёт» в точку оси x, координата которой равна 4, а второй — в точку оси y с координатой 3. Эта пара чисел $x = 4$ и $y = 3$ и есть координаты точки A. Координату x называют *абсциссой* или *первой координатой* точки A, а координату y — *ординатой* или *второй координатой* точки A.

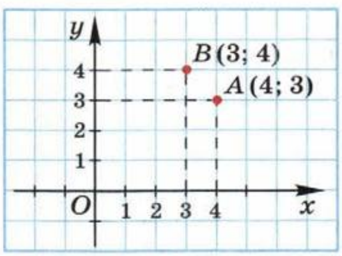


10.13

Буква O для начала координат выбрана не случайно — это первая буква слова *origo* — начало. Термин «координаты» произошёл от латинского слова *ordinatus* — упорядоченный; приставка *со-* указывает на совместность: чаще всего координат бывает две, три или больше.



10.14



10.15

Записывают координаты точки так: A (4; 3). Координата x всегда пишется на первом месте, а координата y — на втором. Если поменять порядок чисел в паре, то получится другая точка — точка B (3; 4) (рис. ***10.15***).

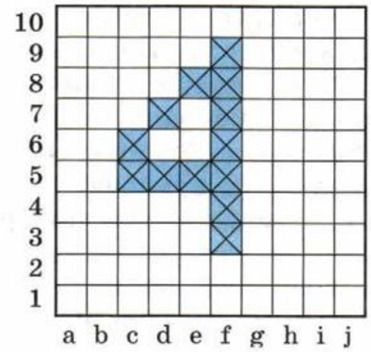
Указать только одну координату точки было бы недостаточно. Так, абсциссу 4, кроме точки A, имеют ещё точки B, C и все точки прямой BC, а ординату 3 имеют точки M, N и все точки прямой MN.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Почему рассмотренную в пункте систему координат называют прямоугольной?
- Какое название имеет точка пересечения осей координат? Какие названия имеют оси координат?
- Как называют пару чисел, определяющую положение точки на плоскости? Посмотрите на рисунок ***10.14*** и расскажите, как определяют координаты точки на координатной плоскости.

УПРАЖНЕНИЯ

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ



10.16

670 На шахматной доске расставлены пять фигур — король, ферзь, слон, конь и ладья (см. рис. ***10.11***). Запишите их координаты (например, король — $f3$).

671 В квадрате 10×10 клеток изображена цифра 4 (рис. ***10.16***). «Зашифруйте» эту цифру с помощью координат: на первом месте пишите букву, на втором — цифру.

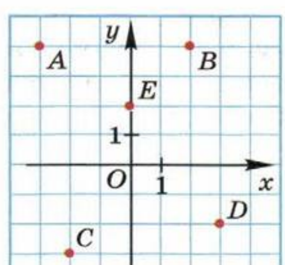
672 Начертите квадрат 10×10 клеток. Изобразите с помощью крестиков любую цифру и «зашифруйте» её. Предложите соседу по парте восстановить эту цифру по вашему шифру.

673 Рассмотрите карту Европы и выполните следующие задания:
а) Запишите координаты (широта, долгота) городов: Киев, Минск, Париж, Гамбург, Лондон.
б) Найдите города, расположенные на 60° с. ш. Для каждого города определите географическую долготу и запишите его координаты.
в) Определите, какие города имеют координаты (41° с. ш.; 4° з. д.); (48° с. ш.; 16° в. д.).

10.17

674 Каждый участок маршрута, изображённого на рисунке ***10.17***, можно описать с помощью трёх координат: заметный ориентир, угол между северным направлением и направлением движения (азимут), расстояние. Например, участок маршрута, идущий от сухого дерева к белому камню, можно записать так: (сухое дерево, 53°, 100 м). Запишите таким образом весь маршрут, изображённый на рисунке. Масштаб плана 1 : 10 000.

ПРИМЕРЫ КООРДИНАТ



10.18

675 Запишите координаты отмеченных точек (рис. ***10.18***).

Отметьте на координатной плоскости точки (№ 676—678).

676 а) (2; 4), (5; −3), (−5; −5), (−1; 3), (4; 0), (0; −2);
б) (7; 3), (−1; 1), (−5; −4), (1; −2), (0; 3), (−6; 0).

677 а) (2; 5) и (5; 2), (−2; 5) и (5; −2), (−2; −5) и (−5; −2);
б) (4; 0) и (0; 4), (−4; 0) и (0; −4).

678 A (2,5; 3), B (−1,5; −2,5), C (−2,8; 4), D (3; −3,2), E (0; 4,5), F (−1,1; 0).

679 Установите соответствие между точками, заданными своими координатами, и координатными четвертями, в которых они расположены.

А. M (−6; 5); **Б.** N (4; −7); **В.** P (−3; −3); **Г.** Q (5; 8).

1) I четверть **2)** II четверть **3)** III четверть **4)** IV четверть

680 Для каждой четверти укажите, какие знаки имеют координаты точек, находящихся в этой четверти:

А. I четверть; **Б.** II четверть; **В.** III четверть; **Г.** IV четверть;

1) x — положительное число, y — отрицательное
2) x и y — положительные числа
3) x — отрицательное число, y — положительное
4) x и y — отрицательные числа

681 Постройте четырёхугольник $ABCD$, если его вершины имеют координаты A (−3; −4), B (−3; 4), C (3; 2), D (3; −2). Запишите координаты точек, в которых стороны четырёхугольника пересекают оси координат.

682 На координатной плоскости отметьте точки A (−6; 2), B (2; 2), C (2; −3). Постройте четвёртую точку D так, чтобы получился прямоугольник $ABCD$. Найдите периметр и площадь прямоугольника $ABCD$.

683 На координатной плоскости постройте треугольник ABC по координатам его вершин: A (2; 2), B (2; 5), C (4; 2). Затем постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно оси x, и треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно оси y. Обозначьте эти два треугольника и запишите координаты их вершин.

684

ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

1) На координатной плоскости постройте данную точку и точку, симметричную ей относительно оси y, запишите её координаты:
A (6; 3), B (4; −1), C (−2; 4,5), D (−3; −2,5).
Сопоставьте координаты точек, симметричных относительно оси y, и сделайте вывод.
2) На координатной плоскости постройте данную точку и точку, симметричную ей относительно оси x, запишите её координаты:
A (5; 2), B (4; −1,5), C (−3; 4), D (−2,5; −5).
Сопоставьте координаты точек, симметричных относительно оси x, и сделайте вывод.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 Даны числа: $-2\frac{1}{3}$; $\frac{5}{7}$; 3,75; −0,5; 0; −120; 42. Найдите среди них: положительные, отрицательные, целые, натуральные, отрицательные дробные числа. Какие числа называют рациональными?

2 Назовите число, противоположное числу: а) 18,5; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0.

3 Некоторое число обозначено буквой a. Как обозначить противоположное ему число? Чему равно $-a$, если $a = 0{,}8$? $a = -15{,}2$?

4 Запишите без скобок: +(+12); +(−10,2); −(+2,4); −(−17).

5 Отметьте на координатной прямой числа: −6; 2,5; $-\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$.

6 Найдите модуль числа: а) $|2{,}8|$; $|-5{,}6|$; $|0|$; б) $|-27|$; $|18|$; $\left|-\frac{7}{8}\right|$; $|4{,}1|$. Чему равен модуль положительного числа? отрицательного числа? нуля?

7 Вставьте пропущенные слова:
Любое отрицательное число ... нуля.
Любое положительное число ... нуля.
Любое положительное число ... любого отрицательного числа.
Из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль ... .

8 а) Сформулируйте правила сложения чисел одного знака; разных знаков; найдите сумму чисел −3,8 и 2,3.
б) Объясните, как из числа −4,5 вычесть число −10.

9 Вычислите: а) $-0{,}8 - 2{,}3$; б) $-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{8} - \frac{5}{6}$; г) $-2{,}5 + 7 - 1{,}5 - 10$.

10 Сформулируйте правила знаков при умножении и делении. Вычислите:
а) $-6 \cdot (-0{,}5)$; б) $-12 \cdot \frac{2}{3}$; в) $8{,}1 : (-0{,}9)$; г) $\frac{-2{,}4}{-0{,}6}$; д) $-1{,}5 \cdot 3{,}4 \cdot (-10)$.

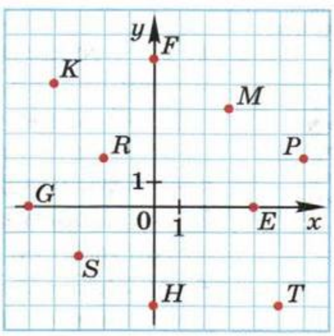
11 Найдите значение выражения: а) $1{,}6 - (-0{,}1) \cdot (-27)$; б) $\frac{-2{,}5 + 0{,}4}{-3}$.

12 Найдите значение степени: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; б) $(-0{,}5)^3$.

13 Найдите значение выражения:
а) $3a$, если $a = -1{,}5$; б) $-6a$, если $a = \frac{1}{24}$.

14 Запишите координаты отмеченных точек (рис. ***10.19***).

15 Постройте прямоугольную систему координат и отметьте в ней точки: $A(-6; -3)$, $B(5; 7)$, $C(-4; 2)$, $D(3; -5)$, $E(0; 3)$, $F(-5; 0)$.

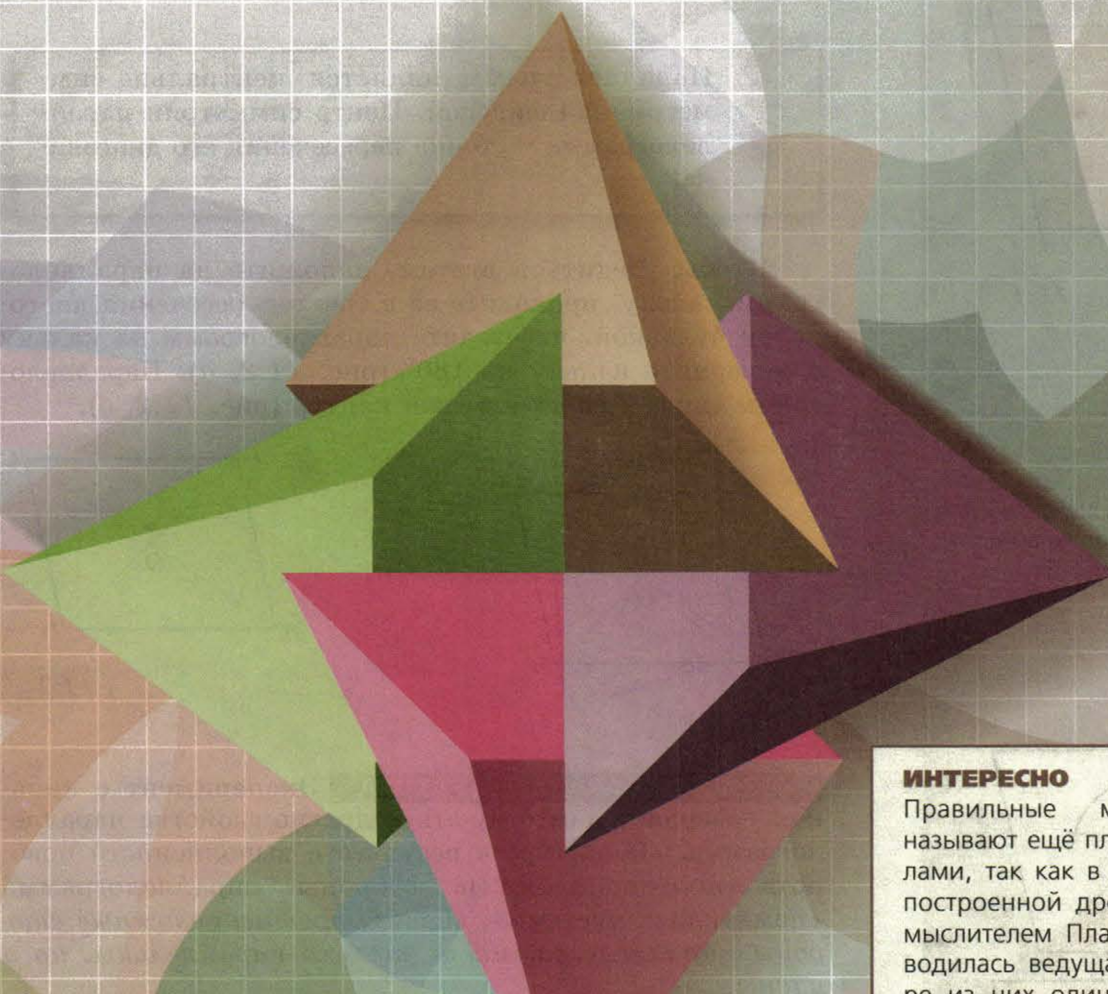


10.19

глава 11

МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ

- ПАРАЛЛЕЛОГРАММ
- ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ
- ПЛОЩАДИ
- ПРИЗМА



ИНТЕРЕСНО

Правильные многогранники называют ещё платоновыми телами, так как в картине мира, построенной древнегреческим мыслителем Платоном, им отводилась ведущая роль. Четыре из них олицетворяли стихии: тетраэдр — огонь, куб — землю, икосаэдр — воду, октаэдр — воздух, а пятый, додекаэдр, — всё мироздание; по-латыни его называли *quinta essentia* («пятая сущность»).

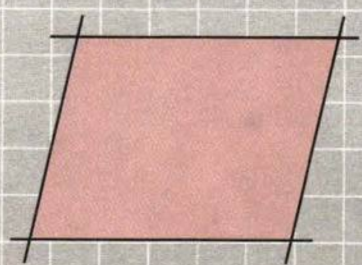
44 ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какой четырёхугольник называют параллелограммом
- Какими свойствами обладает параллелограмм
- Какие выделяют виды параллелограммов

С параллельностью прямых связаны многие важные факты, некоторые из них вам уже известны. Немало замечательных свойств, связанных с параллельностью сторон, есть и у многоугольников.

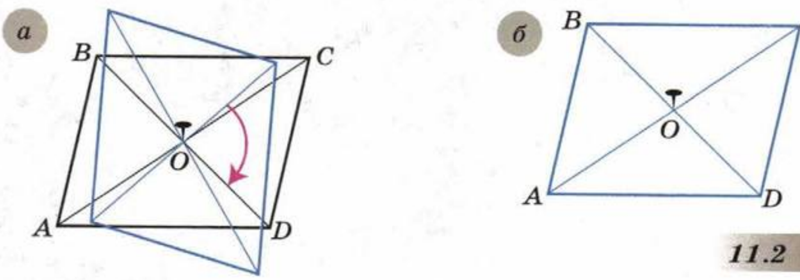
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ На рисунке *11.1* проведены две пары параллельных прямых. При их пересечении образовался четырёхугольник. Его противоположные стороны параллельны. Такой четырёхугольник имеет специальное название — **параллелограмм.**



11.1

> Параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Центр симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей.

Чтобы убедиться в этом, наложите на параллелограмм кальку, проколите её в точке пересечения диагоналей булавкой, переведите параллелограмм на кальку и поверните кальку на 180° (рис. *11.2*, *а*). Параллелограмм снова «войдёт» в свой контур (рис. *11.2*, *б*).

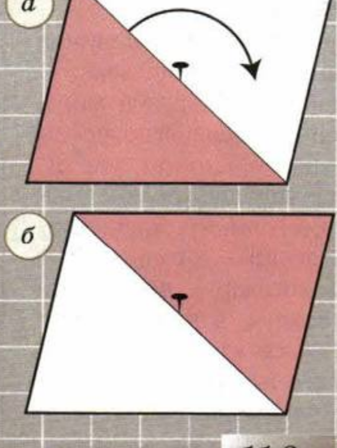


11.2

Слово «параллелограмм» — греческого происхождения, в переводе оно означает «изображающийся параллельными».

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА Эксперимент с калькой позволяет нам открыть и другие свойства параллелограмма. Например, в результате выполненного поворота противоположные стороны параллелограмма «поменялись местами», значит, *противоположные стороны параллелограмма не только параллельны, но и равны.*

При этом же повороте цветной треугольник совместился с белым (рис. *11.3*). Значит, *диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.*



11.3

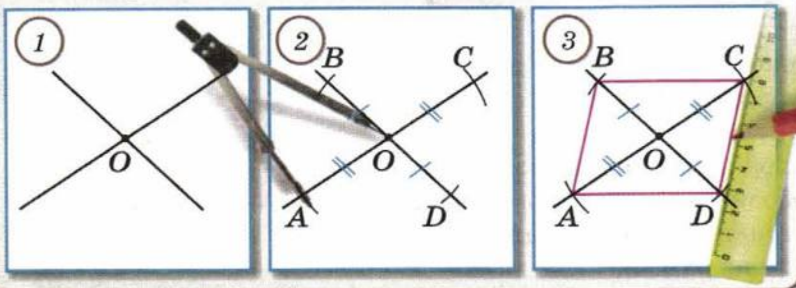
Кроме того, при повороте отрезки OA и OC, а также OB и OD (рис. *11.2*) поменялись местами. Каждая диагональ заняла своё прежнее место. Это означает, что *диагонали точкой пересечения делятся пополам.* Таким свойством обладают диагонали только параллелограмма. Поэтому это свойство даёт нам удобный способ его построения.

1) Проведите две пересекающиеся прямые и обозначьте точку их пересечения буквой O (рис. 1).

2) На одной из прямых отложите циркулем равные отрезки OA и OC, а на другой — равные отрезки OB и OD (рис. 2).

3) Соедините последовательно точки A, B, C и D отрезками (рис. 3).

Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

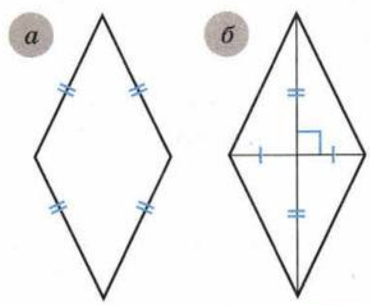


Слово «ромб» пришло из Древней Греции: ρομβοζ — веретено, волчок; силуэты этих вращающихся тел имеют форму ромба. Этим же словом называли и бубен, который в те времена делали в форме квадрата или ромба. А вот слово «квадрат» произошло от латинского слова *quadratus* — четырёхугольный.

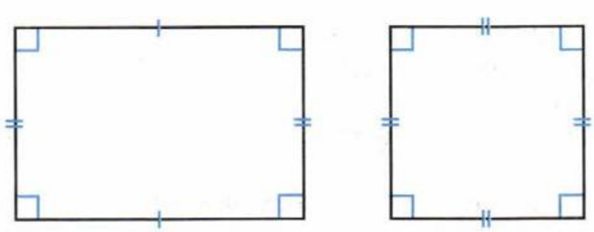
ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ У некоторых параллелограммов есть свои названия. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называют **ромбом** (рис. *11.4*).

Диагонали ромба, кроме свойств, присущих всем параллелограммам, обладают ещё одним: они перпендикулярны друг другу.

К параллелограммам относятся и такие хорошо вам знакомые фигуры, как прямоугольник и квадрат. От других параллелограммов прямоугольник отличается тем, что у него все углы прямые, а у квадрата и все углы прямые, и все стороны равны (рис. *11.5*).



11.4



11.5

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

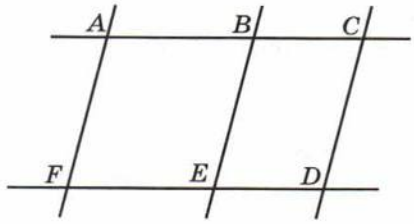
- Какой четырёхугольник называют параллелограммом?
- Воспользуйтесь результатами эксперимента с калькой (см. рис. *11.2*, *б*) и допишите равенства:

  $AB = \dots$, $BC = \dots$,
  $OC = \dots$, $OD = \dots$,
  $OA = \dots$, $OB = \dots$,
  $\triangle ABO = \dots$, $\triangle ABC = \dots$.
- Назовите известные вам свойства параллелограмма.
- Постройте параллелограмм, измерьте его стороны и углы.
- Какие виды параллелограммов вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

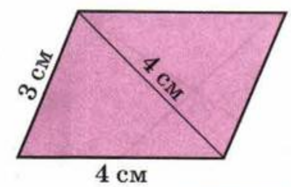
ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

685 Назовите все параллелограммы, которые вы видите на рисунке ***11.6***.



11.6

686 Начертите в тетради, используя свойства клетчатой бумаги, какой-нибудь параллелограмм.

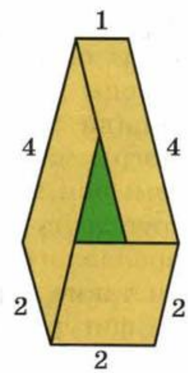


11.7

687 Вычислите периметр параллелограмма со сторонами 9,4 см и 5,7 см. Обозначьте стороны параллелограмма буквами и составьте формулу для вычисления периметра параллелограмма.

688 а) Начертите два разных параллелограмма, диагонали которых равны 4 см и 6 см.
б) Постройте параллелограмм, диагонали которого равны 4 см и 5 см и пересекаются под углом 30°.

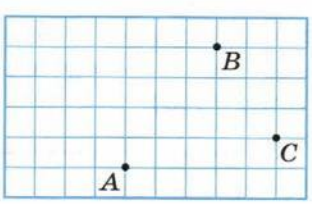
689 Постройте параллелограмм по заданным сторонам и диагонали (рис. ***11.7***).



11.8

690 Четырёхугольники на рисунке ***11.8*** — параллелограммы. Определите длины сторон зелёного треугольника.

691 а) Вырежите из бумаги два равных неравнобедренных треугольника и сложите из них различные параллелограммы. Сколько различных параллелограммов вам удалось сложить? А если взять два равных равнобедренных треугольника? два равных равносторонних треугольника?
б) Точки A, B и C (рис. ***11.9***) — вершины параллелограмма. Постройте все параллелограммы, вершины которых находятся в этих точках.
Указание. Используйте карандаши разных цветов.

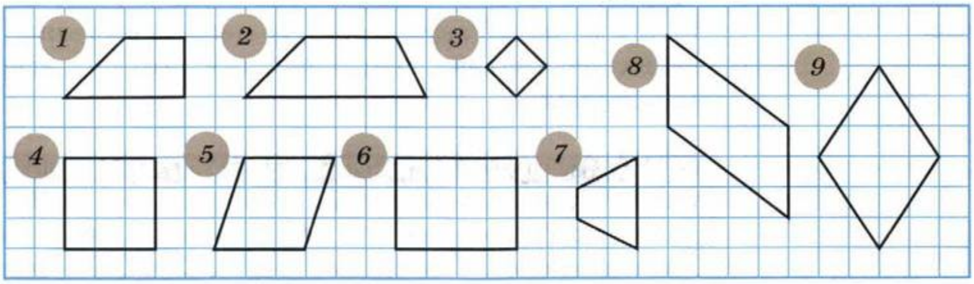


11.9

692 Четырёхугольник $ABCD$ — не параллелограмм, но у него есть одна пара параллельных сторон и одна пара равных сторон. Нарисуйте такой четырёхугольник.

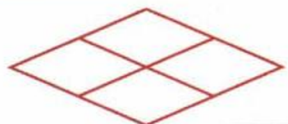
ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

693 Найдите на рисунке ***11.10*** все: а) параллелограммы; б) ромбы; в) прямоугольники; г) квадраты. Перечертите в тетрадь параллелограммы с номерами 5, 8, 9.



11.10

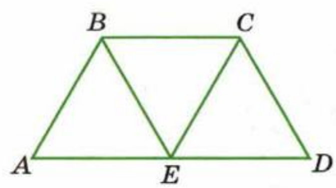
694 Вычислите периметр ромба со стороной 8,5 см. Составьте формулу для вычисления периметра ромба.



11.11

695 Сколько ромбов на рисунке ***11.11***? Сколько параллелограммов?

696 На рисунке ***11.12*** изображены ромбы $ABCE$ и $BCDE$. Найдите периметр треугольника BCE, если $BC = 3$ см. Чему равны углы этого треугольника?



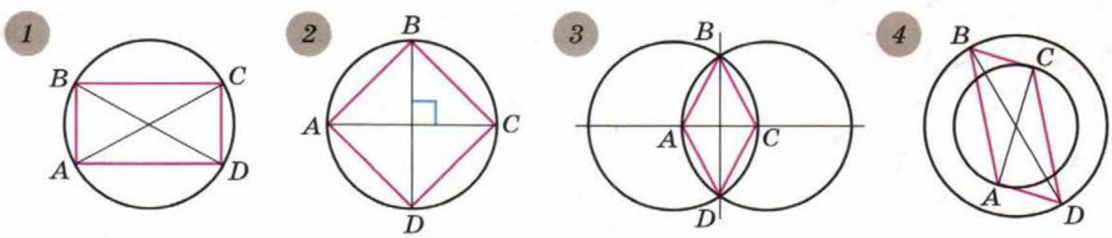
11.12

697 Начертите ромб, диагонали которого равны 4 см и 6 см.

698 Диагонали прямоугольника равны, а диагонали квадрата не только равны, но и перпендикулярны друг другу.
а) Постройте прямоугольник, диагонали которого равны 6 см. Постройте другой прямоугольник с такими же диагоналями, не равный первому.
б) Постройте квадрат с диагоналями, равными 8 см. Можно ли построить не равный ему квадрат с такими же диагоналями?

699 а) У ромба две оси симметрии. Покажите их на рисунке.
б) Перегибая лист бумаги, постройте ромб.

700 На рисунке ***11.13*** показаны способы построения: 1) прямоугольника; 2) квадрата; 3) ромба; 4) параллелограмма. Для каждого четырёхугольника опишите словами способ построения и выполните построения.



11.13

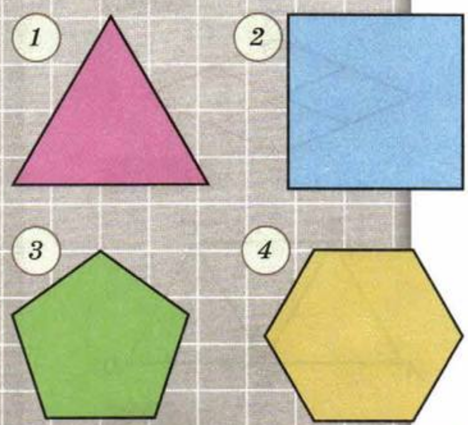
45 ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какие многоугольники называют правильными
- Как можно построить правильный многоугольник
- Сколько существует правильных многогранников

В равностороннем треугольнике, как вы знаете, равны и все стороны, и все углы. Четырёхугольник с равными сторонами и равными углами — это хорошо вам известный квадрат. Такие многоугольники выделяются среди своих «собратьев», например, тем, что они «самые симметричные».

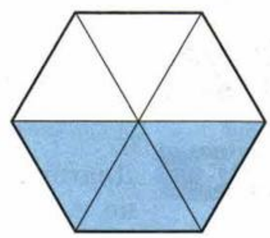
КАКОЙ МНОГОУГОЛЬНИК НАЗЫВАЮТ ПРАВИЛЬНЫМ Существует и пятиугольник с такими же свойствами, и шестиугольник (рис. ***11.14***), и вообще многоугольник с любым числом сторон. Многоугольник, у которого равны все стороны и все углы, называют *правильным*. Таким образом, равносторонний треугольник — это правильный треугольник, а квадрат — это правильный четырёхугольник.



11.14

О ПРАВИЛЬНОМ ШЕСТИУГОЛЬНИКЕ Обратите внимание на такой интересный и важный факт: правильный шестиугольник можно составить из правильных треугольников.

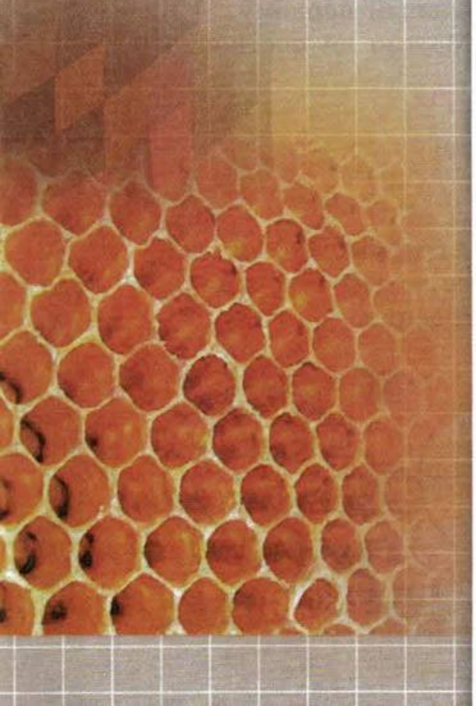
Сложим три одинаковых правильных треугольника (синие треугольники на рисунке ***11.15***). Поскольку величина каждого угла равностороннего треугольника равна 60°, то три их угла, приложенные друг к другу, образуют развёрнутый угол. Приложив сверху ещё три таких треугольника, мы получим шестиугольник. Этот шестиугольник правильный: каждая его сторона равна стороне правильного треугольника, а каждый угол — двум его углам, т. е. 120°.

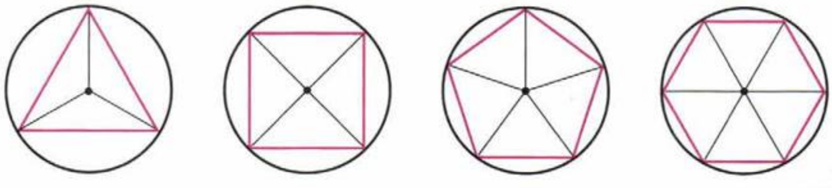


11.15

Если вы когда-нибудь видели пчелиные соты, то, возможно, заметили, что их основа — правильные шестиугольники. И это не случайно. Как доказали математики, такая конструкция очень экономична и прочна. Пчёлы «дошли» до этого «своим умом».

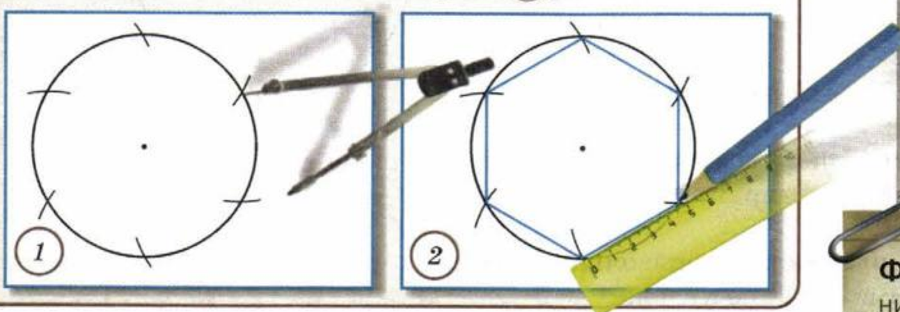
ОКРУЖНОСТЬ И ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК Правильные многоугольники обладают удивительным свойством: *все вершины правильного многоугольника лежат на одной окружности* (рис. ***11.16***). Это свойство можно использовать для его построения. Построить правильный многоугольник можно так: разделить окружность на соответствующее число равных частей (равных дуг) и соединить последовательно точки деления отрезками.





11.16

Легче всего построить правильный шестиугольник. Чтобы разделить окружность на шесть равных частей, достаточно «пройтись» по окружности циркулем с шагом, равным её радиусу (рис. (1)). Соединив последовательно все полученные точки, вы получите правильный шестиугольник (рис. (2)).



Если мы соединим эти точки через одну, то получим правильный треугольник. А если каждую из шести дуг окружности разделить пополам, то мы сможем построить правильный двенадцатиугольник.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ Внимание учёных и художников всегда привлекали *правильные многогранники*. Правильным называют выпуклый многогранник, все грани которого — равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Вы удивитесь, но существует всего лишь пять правильных многогранников. Вот как изобразил их Леонардо да Винчи. Этот рисунок он сделал для книги своего друга Луки Пачоли «Божественная пропорция».

тетраэдр | куб гексаэдр | октаэдр | икосаэдр | додекаэдр

Слово «тетраэдр» переводится с греческого как «четырёхгранник» («тетра» — четыре и «хедрон» — грань), «гексаэдр» — шестигранник. Как бы вы перевели с греческого языка названия других правильных многогранников?

Форму правильных многогранников имеют некоторые кристаллы. Посмотрите на фото: кристалл поваренной соли имеет форму куба, а кристалл пирита — форму октаэдра.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Чему равны величины углов правильного треугольника? правильного четырёхугольника?
- Опишите словами, как построить с помощью циркуля правильный шестиугольник, правильный треугольник.
- Какие многоугольники называют правильными? А многогранники?

УПРАЖНЕНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

701 Постройте правильный шестиугольник со стороной 4 см. На этом же чертеже, но карандашом другого цвета постройте правильный треугольник.

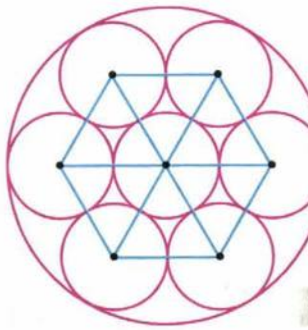
702 Два взаимно перпендикулярных диаметра делят окружность на четыре равные части (см. рис. ***11.13***, 2). Используйте это для построения квадрата.

703 а) На рисунке ***11.17*** показано, как можно построить правильный двенадцатиугольник. Рассмотрите рисунок и выполните построения.
б) Постройте правильный восьмиугольник.

11.17

704 Постройте правильный пятиугольник по следующему плану:
1) с помощью транспортира, постройте пять равных углов с общей вершиной, составляющих в сумме $360°$;
2) проведите окружность произвольного радиуса с центром в вершине углов;
3) соедините последовательно точки пересечения окружности со сторонами углов.

705 Скопируйте рисунок ***11.18***.



11.18

СВОЙСТВА ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

706 Чему равны углы правильного шестиугольника (см. рис. ***11.16***)? правильного пятиугольника? правильного восьмиугольника?

707 Вычислите периметр правильного пятиугольника со стороной 12 см, правильного шестиугольника со стороной 8 см. Запишите формулу для вычисления периметра правильного n-угольника.

708

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Сколько осей симметрии у правильного треугольника? четырёхугольника? пятиугольника? шестиугольника? десятиугольника? Нарисуйте эти фигуры от руки и проведите их оси симметрии.

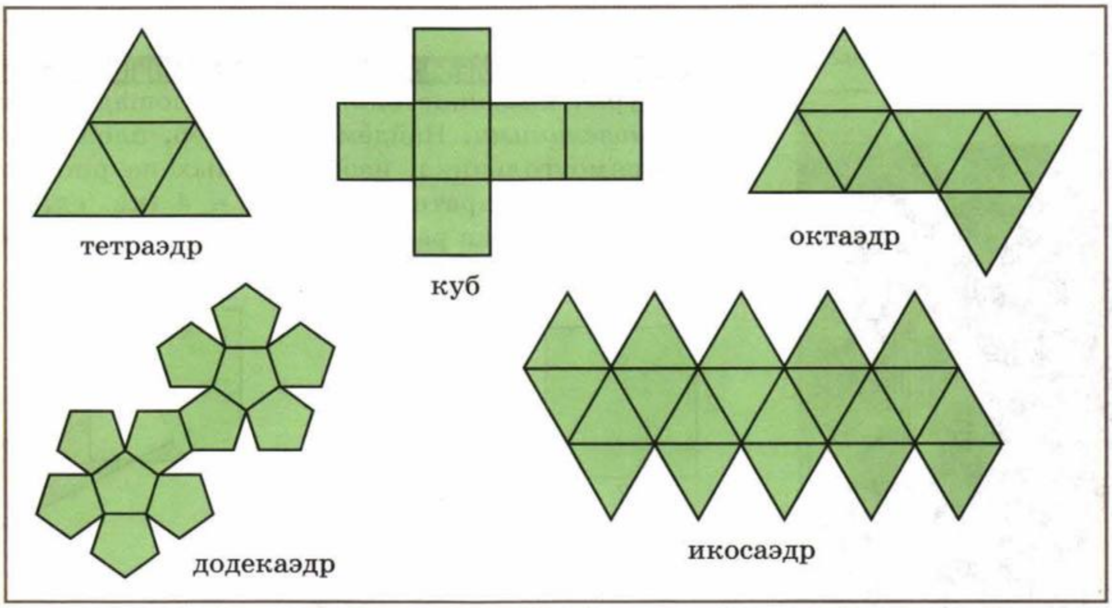
2) Сколько осей симметрии у правильного стоугольника? девяностодевятиугольника? Запишите выражение для вычисления числа осей симметрии правильного n-угольника.

3) У каких правильных многоугольников есть центр симметрии?

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

709 На рисунке *11.19* изображены развёртки правильных многогранников. Выберите одну из развёрток, перенесите её, увеличив, на лист бумаги и склейте из неё многогранник.

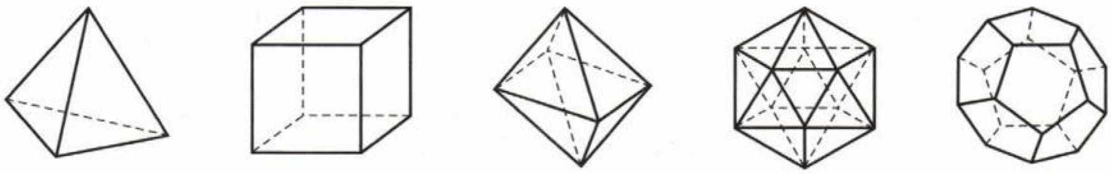
Указание. Не забудьте дорисовать клапаны для склеивания.



11.19

710 Используя изображения правильных многогранников (рис. *11.20*) или их модели, заполните таблицу.

Правильный многогранник	Форма граней	Число граней в одной вершине	Число		
			вершин	граней	рёбер
Тетраэдр					
Куб					
Октаэдр					
Додекаэдр					
Икосаэдр					



11.20

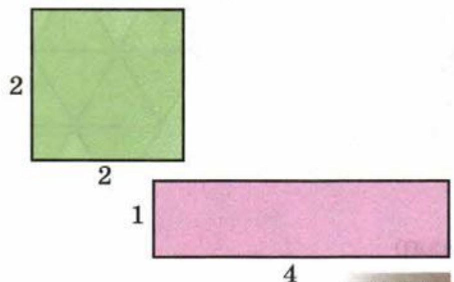
46 ПЛОЩАДИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

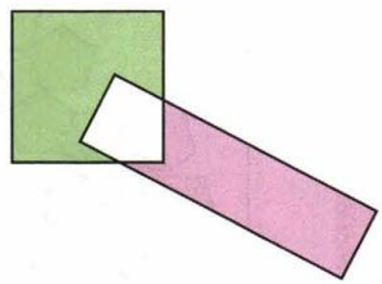
- Какие фигуры называют равносоставленными, а какие — равновеликими
- Как путём перекраивания можно найти площади параллелограмма и треугольника

Вы уже знакомы с очень многими геометрическими фигурами, а вот вычислить площадь можете только прямоугольника или квадрата. Но оказывается, этого вполне достаточно, если вы сумеете перекроить фигуру, площадь которой хотите найти, в ту, площадь которой находить умеете.

РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ Две фигуры, имеющие одинаковую площадь, называются *равновеликими*. Найдём, например, площади квадрата и прямоугольника, изображённых на рисунке ***11.21***. Площадь квадрата равна $2 \cdot 2 = 4$ (кв. ед.), площадь прямоугольника равна $1 \cdot 4 = 4$ (кв. ед.). Следовательно, эти фигуры равновелики.



11.21



11.22

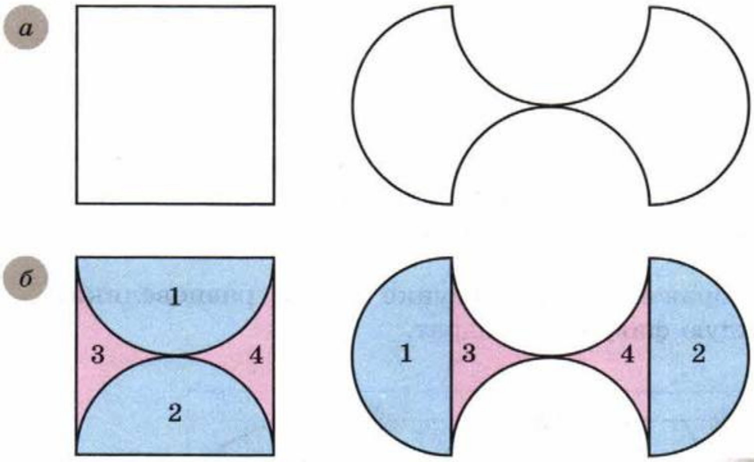
На рисунке ***11.22*** те же квадрат и прямоугольник наложены друг на друга. Закрашенные многоугольники тоже равновелики. Действительно, если из равных величин (площади квадрата и площади прямоугольника) вычесть поровну (площадь белого многоугольника), то поровну и останется.

Если фигура разрезана на части, то её площадь равна сумме площадей её частей. Значит, если фигуры составлены из одинаковых частей, или, как говорят, *равносоставлены*, то они имеют и равную площадь.

> **!** Равносоставленные фигуры равновелики.

Рассмотрим две фигуры, изображённые на рисунке ***11.23, а***. Оказывается, эти столь непохожие друг на друга фигуры можно разрезать на одинаковые части (рис. ***11.23, б***). Значит, они равновелики. Это свойство равносоставленных фигур даёт нам полезный приём нахождения площадей. Он заключается в перекраивании данной фигуры в другую, площадь которой мы вычислять умеем.

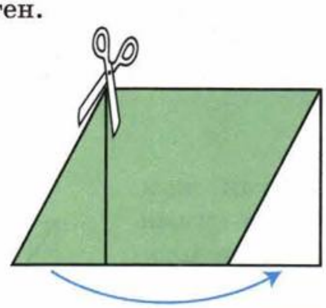
Верно и другое: если два многоугольника имеют одинаковую площадь, то их можно разрезать на попарно равные куски. А вот с многогранниками дело обстоит иначе. Например, равновеликие тетраэдр и куб не равносоставлены — их нельзя разбить на попарно равные части.



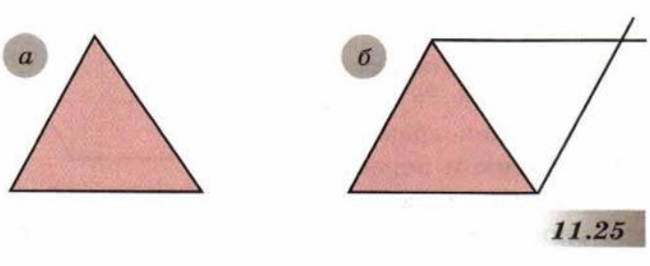
11.23

Идею перекраивания для нахождения площадей самых разных фигур использовали ещё древние математики. Так, в одной из трёх знаменитых задач древности — задаче о квадратуре круга — требуется построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному кругу. Задача эта была известна за две тысячи лет до н.э. в Древнем Египте и Вавилоне, но только в 1822 г. было доказано, что сделать это невозможно.

ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА И ТРЕУГОЛЬНИКА Используем этот приём, чтобы найти площадь параллелограмма. Разрежем параллелограмм вдоль отрезка, перпендикулярного двум параллельным сторонам, и переложим отрезанный треугольник, как показано на рисунке ***11.24***. Параллелограмм удалось перекроить в прямоугольник, а способ вычисления площади прямоугольника известен.


11.24

Подобным образом можно найти и площадь треугольника (рис. ***11.25***, *а*). Треугольник легко достроить до параллелограмма, проведя прямые, параллельные двум его сторонам (рис. ***11.25***, *б*). Очевидно, что площадь нашего треугольника составляет половину площади построенного параллелограмма. А как найти площадь параллелограмма, вы уже знаете.



11.25

На фото — вавилонская глиняная табличка, содержащая геометрические задачи.
Квадрат заданных размеров поделён на различные фигуры, площади которых ученик должен вычислить.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

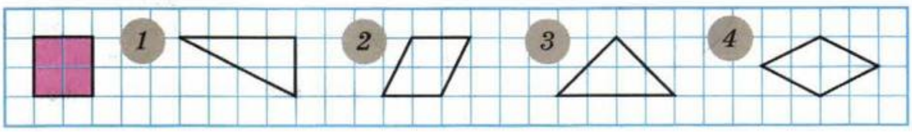
- Возьмите квадрат и разрежьте его по одной диагонали. Сложите из получившихся частей треугольник.
- Какие фигуры называют равновеликими?
- Что значит фигуры равносоставлены?
- Каким свойством обладают равносоставленные фигуры?

УПРАЖНЕНИЯ

РАВНОВЕЛИКИЕ ФИГУРЫ

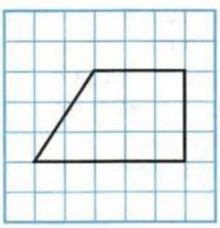
711 Нарисуйте какой-нибудь прямоугольник, равновеликий квадрату со стороной 6 см. Сколько существует прямоугольников с такой площадью, длины сторон которых (в см) выражаются целыми числами?

712 Покажите, что фигуры, изображённые на рисунке ***11.26***, равновелики. *Подсказка.* Перекроите каждую фигуру в квадрат.

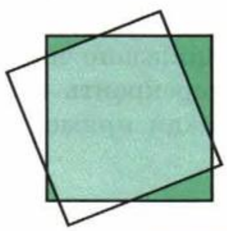


11.26

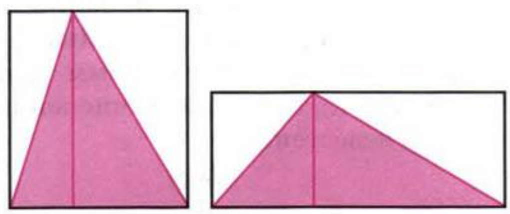
713 Нарисуйте несколько фигур, равновеликих фигуре, изображённой на рисунке ***11.27***.



11.27



11.28

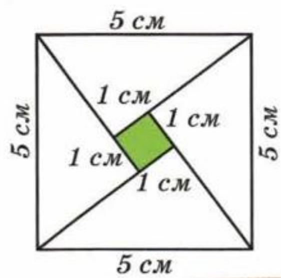


11.29

714 Два одинаковых квадрата расположены так, как показано на рисунке ***11.28***. Докажите, что сумма площадей тёмных треугольников равна сумме площадей белых треугольников.

715 Прямоугольники, изображённые на рисунке ***11.29***, равновелики. Верно ли, что и закрашенные треугольники равновелики?

716 От квадрата отрезали четыре равных треугольника (рис. ***11.30***). Оставшаяся часть — квадрат. Чему равна площадь каждого треугольника?



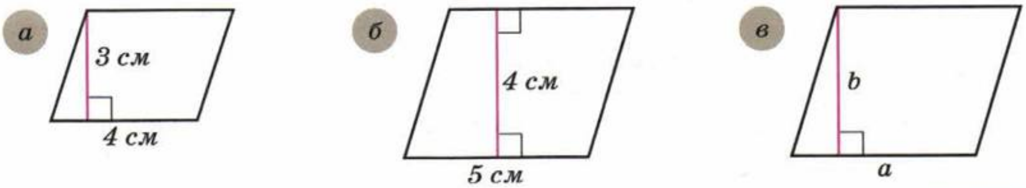
11.30

ПЕРЕКРАИВАЕМ ФИГУРЫ

717 а) Перенесите рисунок ***11.31*** в тетрадь и покажите, как параллелограмм можно перекроить в прямоугольник. Чему равна площадь параллелограмма?
б) Вырежите из бумаги параллелограмм и перекроите его в прямоугольник. Проведя необходимые измерения, найдите площадь параллелограмма.

11.31

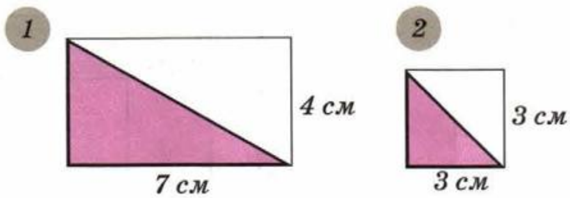
718 1) Представьте, что параллелограмм разрезали вдоль красного отрезка (рис. ***11.32***, *а* и *б*) и из получившихся частей сложили прямоугольник. Каковы измерения этого прямоугольника? Чему равна площадь параллелограмма?
2) Составьте формулу для вычисления площади S параллелограмма (рис. ***11.32***, *в*).



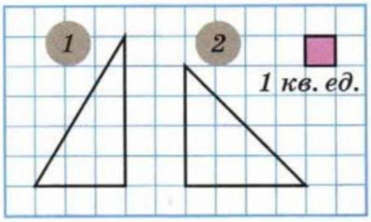
11.32

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

719 а) Найдите площади закрашенных треугольников (рис. ***11.33***).
б) Достроив каждый треугольник, изображённый на рисунке ***11.34***, до прямоугольника, определите площадь треугольника.

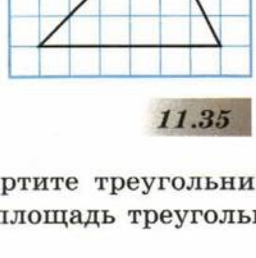


11.33

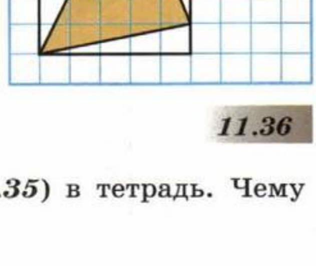


11.34

720 Составьте формулу для вычисления площади прямоугольного треугольника со сторонами a и b, образующими прямой угол. Вычислите площадь треугольника, если: а) a = 3 см, b = 4 см; б) a = 4,5 см, b = 6 см.



11.35

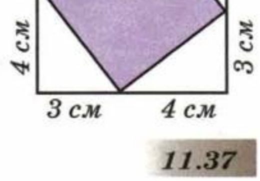


11.36

721 Перечертите треугольник (рис. ***11.35***) в тетрадь. Чему равна площадь треугольника?

722 Найдите площадь закрашенного треугольника (рис. ***11.36***).

723 1) От квадрата отрезали четыре равных треугольника (рис. ***11.37***). Найдите площадь оставшейся части.
2) Как вы думаете, какой фигурой является этот многоугольник?



11.37

47 ПРИЗМА

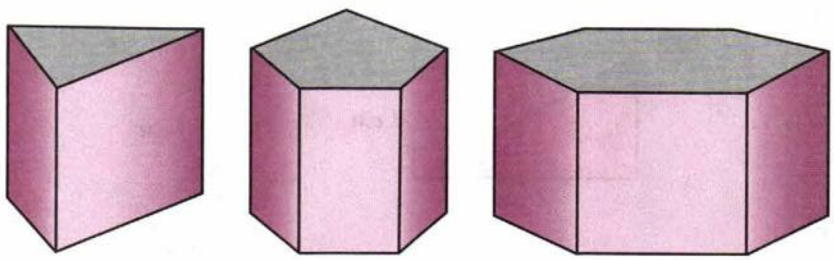
ВЫ УЗНАЕТЕ

- Какие многогранники называют призмами
- Какими свойствами они обладают

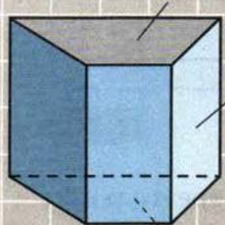
Название «призма» произошло от греческого слова, которое можно перевести как «отпиленный кусок».

С одним из семейств многогранников — пирамидами — вы уже знакомы. Но есть ещё одно очень важное семейство, отдельные представители которого вам также хорошо и давно известны.

ПРИЗМЫ На рисунке ***11.38*** изображены **прямые призмы** (бывают ещё и наклонные призмы, но мы их сейчас рассматривать не будем). Среди граней призмы различают *основания* (их два) и *боковые грани* (рис. ***11.39***). Основания представляют собой равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях. Соответствующие стороны этих многоугольников параллельны. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Рёбра, соединяющие вершины оснований, называют *боковыми рёбрами призмы*. Все боковые рёбра прямой призмы равны, параллельны и перпендикулярны основаниям.



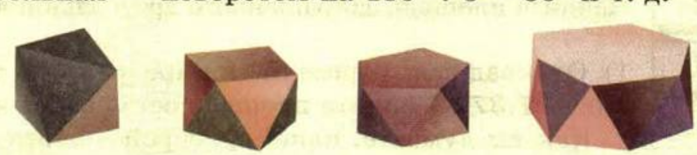
11.38



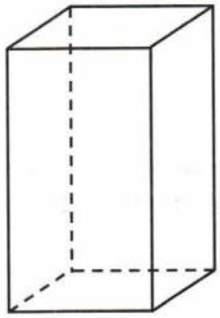
11.39

Называют призму по числу сторон основания. Например, призма, изображённая на рисунке ***11.39***, четырёхугольная. Если основанием прямой призмы служит правильный многоугольник, то и призму называют **правильной призмой**.

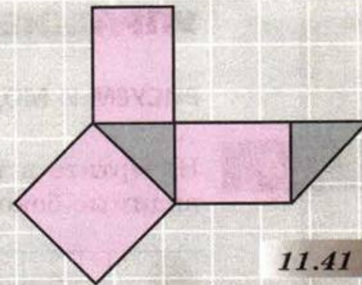
Многогранники, изображенные на рисунке, — *антипризмы*. Треугольная антипризма получена из правильной треугольной призмы поворотом верхнего основания на угол, равный $180° : 3 = 60°$; при этом боковые рёбра образуют зигзагообразную ломаную, а все боковые грани — правильные треугольники. Точно так же получены и другие антипризмы: четырёхугольная — поворотом на $180° : 4 = 45°$, пятиугольная — поворотом на $180° : 5 = 36°$ и т. д.



ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД Хорошо знакомый вам представитель семейства призм — параллелепипед (рис. ***11.40***). Параллелепипед — это четырёхугольная призма. Его называют прямоугольным параллелепипедом: все его грани являются прямоугольниками.

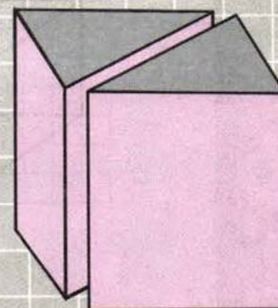


11.40



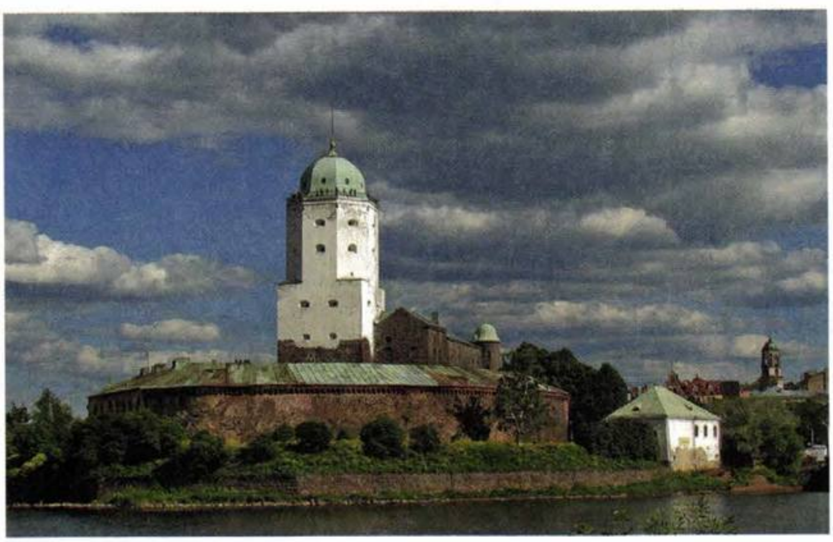
11.41

РАЗВЁРТКА ПРИЗМЫ На рисунке ***11.41*** изображена развёртка треугольной призмы, основанием которой является прямоугольный равнобедренный треугольник. Такую призму можно получить, например, если разрезать параллелепипед, основанием которого является квадрат (рис. ***11.42***).



11.42

ПРИЗМЫ В АРХИТЕКТУРЕ Призмы часто использовались зодчими при возведении замков, башен, церквей. Посмотрите на фото ниже. На нём вы видите башню рыцарского замка, расположенного в городе Выборге (Ленинградская обл.). Нижняя часть башни — это куб, а средняя её часть — восьмиугольная призма, «вырезанная» из такого же куба.



Популярна эта форма и в наше время. Пентагон (от греч. «пятиугольник») — здание Министерства обороны США — имеет форму пятиугольной призмы (фото справа). Длина каждой из пяти сторон здания равна 281 м. Внутренний двор здания имеет форму правильного пятиугольника.

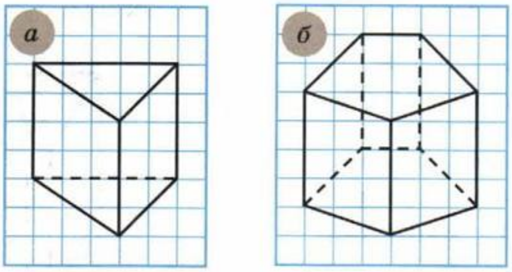
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Назовите каждую призму (рис. ***11.38***).
- Перенесите развёртку (рис. ***11.41***) на лист плотной бумаги, увеличив каждый отрезок в 3 раза. Склейте призму. (Не забудьте сделать клапаны для склеивания призмы.)
- Какую форму имеют грани призмы?
- Какие призмы называют правильными?

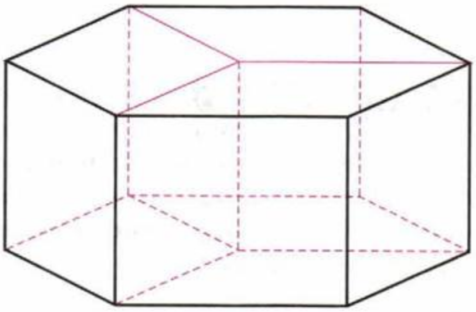
УПРАЖНЕНИЯ

РИСУЕМ И МОДЕЛИРУЕМ

724 Начертите в тетради такую же призму, как на рисунке ***11.43***. Закрасьте видимые боковые грани одним цветом, а видимое основание другим.



11.43



11.44

725 а) Нарисуйте пятиугольную призму, например такую, как на рисунке ***11.43, б***. Покажите, как можно рассечь её на треугольные призмы.
б) Правильную шестиугольную призму распилили на 3 части, как показано на рисунке ***11.44***. Какие многогранники при этом получились?

726 Сделайте развёртку и склейте из неё: а) правильную треугольную призму; б) правильную шестиугольную призму.

727 Сколько плоскостей симметрии у правильной: а) треугольной призмы; б) четырёхугольной призмы (не являющейся кубом); в) пятиугольной призмы?

СКОЛЬКО ГРАНЕЙ? РЁБЕР? ВЕРШИН?

728 а) Сколько у пятиугольной призмы боковых рёбер? всего рёбер? Сколько у неё боковых граней? всего граней? Сколько у этой призмы вершин?
б) Ответьте на те же вопросы для шестиугольной призмы.

729 Сколько вершин, рёбер, граней: а) у семиугольной призмы; б) у десятиугольной призмы; в) у n-угольной призмы?

730 а) У призмы 2000 вершин. Сколько вершин в каждом основании этой призмы? Назовите эту призму. Существует ли призма, у которой 2001 вершина?
б) У призмы 33 ребра. Что это за призма? Существует ли призма, у которой 100 рёбер?
в) У призмы 22 грани. Какая это призма? Существует ли призма, у которой 23 грани?

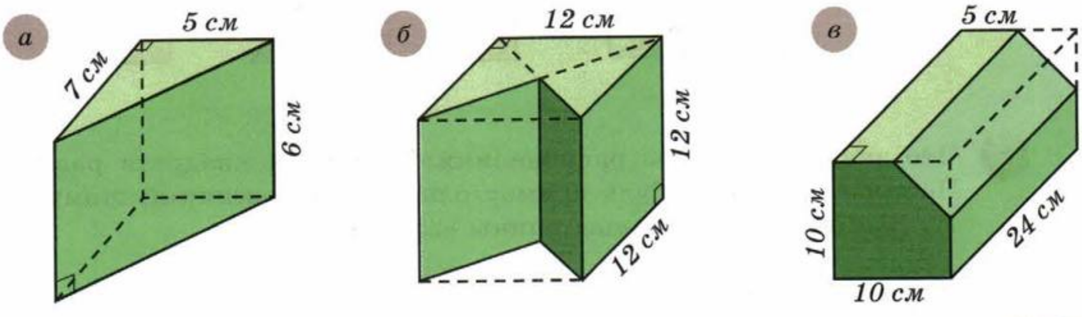
731 Известно, что многогранник является либо пирамидой, либо призмой. Что это за многогранник, если у него: а) 13 вершин; б) 15 рёбер?

ВЫЧИСЛЯЕМ. СОСТАВЛЯЕМ ФОРМУЛЫ

732 1) Сколько потребуется проволоки, чтобы изготовить каркасную модель: а) треугольной призмы, все рёбра которой равны 10 см; б) правильной пятиугольной призмы, боковое ребро которой равно 8 см, ребро основания — 5 см?
2) Запишите формулу для вычисления длины l проволоки, которая потребуется на изготовление каркаса правильной n-угольной призмы с боковым ребром, равным a см, и ребром основания, равным b см.

733 Основанием параллелепипеда является квадрат. Боковое ребро параллелепипеда равно a см, ребро основания равно b см. Запишите формулу для вычисления: а) длины l проволоки, которая потребуется на изготовление его каркаса; б) площади S поверхности параллелепипеда.

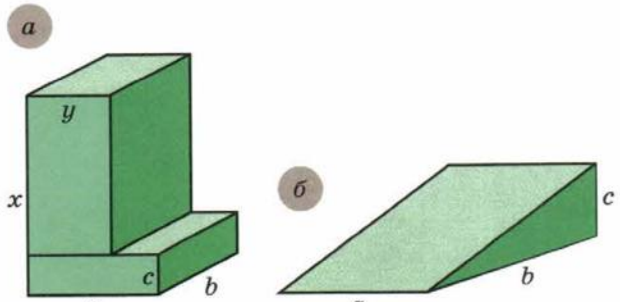
734 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке ***11.45***.



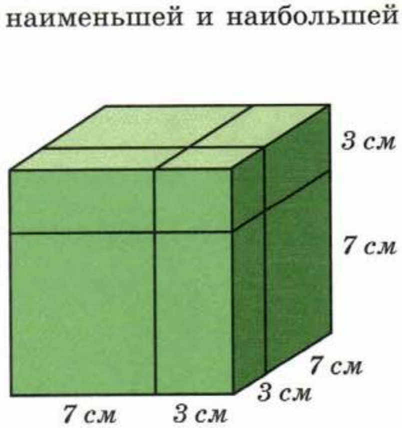
11.45

735 Запишите формулу для вычисления объёма V многогранника, изображённого на рисунке ***11.46***.

736 Деревянный куб с ребром 10 см распилили на части вдоль трёх плоскостей, параллельных его граням, как показано на рисунке ***11.47***. На сколько частей распилен куб? Найдите объёмы наименьшей и наибольшей частей.



11.46



11.47

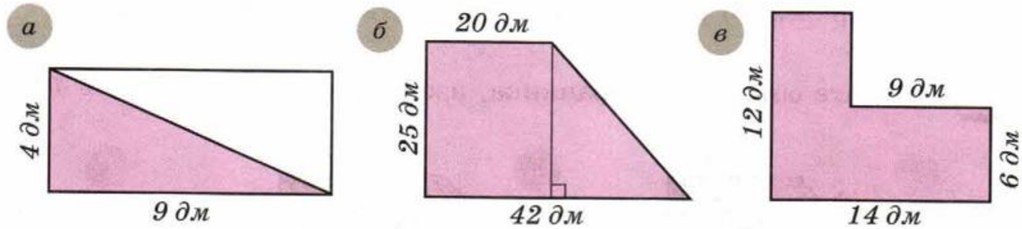
ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 Какой четырёхугольник называют параллелограммом? Назовите виды параллелограммов. Вспомните их свойства.

2 Постройте какой-нибудь параллелограмм:
а) со сторонами, равными 3 см и 4 см;
б) с диагоналями, равными 5 см и 4 см.

3 Вычислите периметр параллелограмма со сторонами 10 см и 15 см.

4 Найдите площадь закрашенной фигуры.



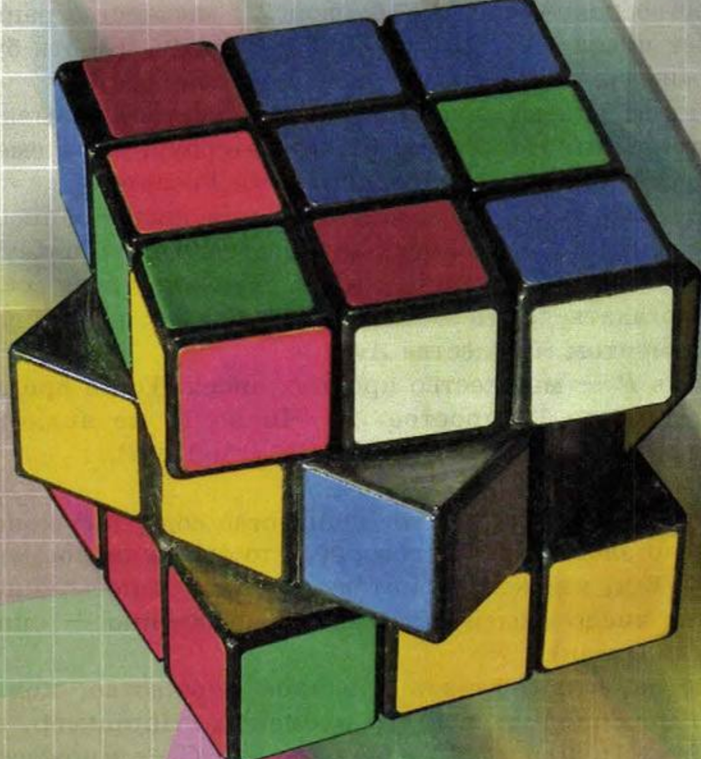
5 Что значит «фигуры равновелики»? Сторона квадрата равна 4 см. Постройте какой-нибудь прямоугольник, равновеликий этому квадрату. Запишите, чему равны длины его сторон.

6 Выполните задание:
1) Начертите окружность с центром в точке O и проведите два перпендикулярных диаметра AC и BD.
2) $ABCD$ — квадрат. Начертите его.
3) Через каждую из точек A, B, C и D проведите касательную к этой окружности.
4) Точки пересечения касательных обозначьте буквами K, M, L и N. Эти точки — вершины квадрата.
5) Найдите отношение площадей квадратов $ABCD$ и $KMLN$.

глава 12

МНОЖЕСТВА. КОМБИНАТОРИКА

- ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА
- ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ
- РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ



ИНТЕРЕСНО

Толчком к развитию комбинаторики послужило искусство шифрования. Ещё с давних времён дипломаты и заговорщики, стремясь к тайне переписки, изобретали различные шифры, а секретные службы пытались их разгадать. Со временем стали применяться шифры, основанные на принципах комбинаторики, например на различных перестановках букв в словах.

В XVI в. противники французского короля Генриха IV для переписки с испанским двором использовали сложный шифр, насчитывавший более 500 знаков. Хотя французы часто перехватывали письма из Испании, расшифровать их никто не мог. И только математик Франсуа Виет сумел быстро найти ключ к этому шифру. Поражённые испанцы обвинили Генриха IV в том, что у него на службе состоит сам дьявол.

48 ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА

ВЫ УЗНАЕТЕ

- В каких случаях в математике употребляют слово «множество»
- Что называют подмножеством данного множества

Слово «множество» в математическом языке употребляется, быть может, даже чаще, чем слово «число». Им обозначают любую совокупность объектов (или предметов), объединённых каким-либо общим признаком. Можно, например, говорить о множестве дней в году, множестве букв латинского алфавита, множестве всех стран на земном шаре, множестве планет Солнечной системы. Для математики особенно важны множества, составленные из математических объектов — чисел, выражений, точек, фигур и т. д.

ОБОЗНАЧЕНИЯ Множества обычно обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, M, P и т. д. А основные числовые множества всегда обозначают буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$: множество натуральных чисел — буквой $\boldsymbol{N}$, множество целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$, множество рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$. Можно сказать, что эти буквы — «имена собственные» указанных множеств.

Всякий объект, входящий в множество, называют его **элементом**. Например, Санкт-Петербург — элемент множества городов европейской части России.

Для того чтобы на математическом языке записать предложение «x — элемент множества A», используют знак $\in$. Соответствующая запись выглядит так: $x \in A$. Легко догадаться, что запись $x \notin A$ означает: «x не является элементом множества A».

Пусть P — множество простых чисел. Тогда предложения «Число 13 простое» и «Число 15 не является простым» можно записать так: $13 \in P$ и $15 \notin P$.

ЗАДАНИЕ МНОЖЕСТВ Если множество содержит конечное число элементов, то говорят, что это **конечное множество.** Так, множество жителей нашей планеты конечно (хотя число людей на Земле очень велико — около 6 млрд 800 млн).

Иногда, чтобы задать конечное множество, можно просто перечислить все его элементы. Например, запись $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ означает, что C — множество первых пяти нечётных чисел. Элементы множества можно перечислять в любом порядке. Например, множество $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ можно записать так: $\{9; 7; 5; 3; 1\}$ — или так: $\{1; 9; 3; 7; 5\}$. Всё это разные представления одного и того же множества.

Однако задавать множество перечислением его элементов удобно только в том случае, когда их число невелико. Ведь гораздо проще сказать, к примеру, что B — множество двузначных чисел, чем перечислять все дву-

Основатель теории множеств немецкий учёный Георг Кантор (1845–1918) так разъяснял смысл понятия множества: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

N – первая буква латинского слова *natura* (природа).
Z – первая буква немецкого слова *Zahl* (число).
Q – первая буква французского слова *quotient* (частное).

Слово «множество» в математике необязательно означает «много». Множество может содержать несколько элементов, только один элемент и даже не содержать ни одного элемента.

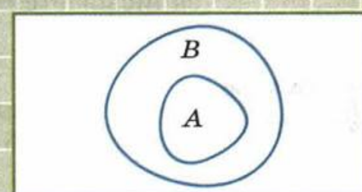
значные числа от 10 до 99. К тому же в математике рассматривают и **бесконечные множества**. Поэтому чаще всего множества задают описанием. Вот примеры такого задания: множество стран, принявших участие в Олимпийских играх в Пекине; множество растений, занесённых в Красную книгу; множество чисел, кратных 5.

Пусть A — множество чисел, которые делятся на 4, но не делятся на 2. Попробуйте назвать хотя бы одно такое число. У вас это не получилось? Это и неудивительно: ведь таких чисел не существует! Значит, мы описали множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называют **пустым множеством** и обозначают символом $\varnothing$.

ПОДМНОЖЕСТВА Возьмём множества

$$\{1;\ 3;\ 5\} \text{ и } \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}.$$

Каждый элемент первого множества принадлежит также и второму. В таком случае говорят, что первое множество является **подмножеством** второго.



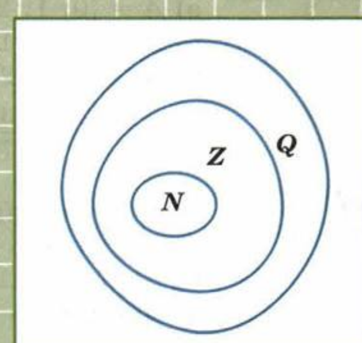
12.1

Множество A называют подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.
Пустое множество считают подмножеством любого другого множества.

Из определения, в частности, следует, что в число подмножеств данного множества включается и само это множество.

Если множество A является подмножеством множества B, то это записывают так: $A \subset B$.

Факт включения множества A в множество B проиллюстрирован с помощью так называемых **кругов Эйлера** (рис. ***12.1***). Вы видите, что все точки круга A принадлежат также и кругу B.



12.2

С подмножествами мы встречаемся всякий раз, когда некоторое множество рассматривается как часть другого, более широкого множества. Так, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, а множество целых чисел — подмножеством множества рациональных чисел. Можно записать такую цепочку включений: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (рис. ***12.2***).

А вот «нематематический» пример: множество кашалотов является подмножеством множества китообразных, множество китообразных — подмножеством множества млекопитающих, множество млекопитающих — подмножеством множества животных.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.
- В каком случае множество *A* называют подмножеством множества *B*? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕРМИНОВ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

737 Пусть A — множество целых чисел, больших -100 и меньших 150. Какие из чисел 0, -125, 135, -99, 100, -100 являются элементами этого множества? Запишите ответ с использованием знака $\in$.

738 Пусть C — множество рациональных чисел, больших 0,3 и меньших 0,6. Какие из чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ не принадлежат этому множеству? Запишите ответ с помощью знака $\notin$.

739 Задайте перечислением элементов множество цифр, с помощью которых записывается число:
а) 3254; б) 3252; в) 11 000; г) 555 555.

740 Прочитайте следующие утверждения и определите, верны ли они:
а) $25 \in \boldsymbol{N}$, $-25 \in \boldsymbol{Z}$, $-25 \notin \boldsymbol{Q}$; б) $-8 \in \boldsymbol{N}$, $8 \in \boldsymbol{Z}$, $-8 \notin \boldsymbol{Z}$.

741 Запишите на символическом языке следующее утверждение:
а) число 10 — натуральное;
б) число -7 не является натуральным;
в) число -100 является целым;
г) число 2,5 — не целое.

742 Задайте множество A описанием:
а) $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$;
б) $A = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$;
в) $A = \{11;\ 22;\ 33;\ 44;\ 55;\ 66;\ 77;\ 88;\ 99\}$;
г) $A = \left\{\frac{1}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{3}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{7};\ \frac{6}{7}\right\}$.

743 Конечным или бесконечным является:
а) множество натуральных чисел, кратных 10;
б) множество натуральных чисел, больших 10;
в) множество натуральных чисел, меньших 10;
г) множество целых чисел, больших -10;
д) множество целых чисел, модуль которых меньше 10;
е) множество целых чисел, модуль которых больше 10?
В каждом случае укажите наибольший элемент множества (если он есть).

744 Конечным или бесконечным является:
а) множество правильных дробей со знаменателем 10;
б) множество неправильных дробей со знаменателем 10;
в) множество дробей с числителем, равным 1, заключённых в промежутке от 0 до 1;
г) множество десятичных дробей, заключённых между числами 0,1 и 0,2?

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВ

745 Даны множества:
$A = \{10\}$, $B = \{10; 15\}$, $C = \{5; 10; 15\}$, $D = \{5; 10; 15; 20\}$.
Поставьте вместо ... знак включения ($\subset$ или $\supset$) так, чтобы получилось верное утверждение:
а) A ... D; б) A ... B; в) C ... A; г) C ... B.

746 Дано множество $B = \{a; b; c; d\}$.
1) Запишите какое-нибудь подмножество множества B, содержащее один элемент; два элемента; три элемента.
2) Какое наибольшее число элементов может содержать подмножество множества B?

747 Укажите несколько конечных и бесконечных подмножеств множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Выполните это же задание для множества целых чисел $\boldsymbol{Z}$.

748 Прочитайте разными способами указанные соотношения между множествами и изобразите каждое из них с помощью кругов Эйлера:
а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; б) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.
Образец. а) Запись $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ можно прочитать по-разному: множество натуральных чисел есть подмножество множества целых чисел, или так: всякое натуральное число является числом целым.

749 а) Пусть $\boldsymbol{P}$ — множество простых чисел. Изобразите соотношение между множествами $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$ с помощью кругов Эйлера и запишите соответствующую «цепочку», используя знак $\subset$.
б) Пусть A — множество всех треугольников, B — множество равнобедренных треугольников, C — множество равносторонних треугольников. Изобразите соотношение между этими множествами с помощью кругов Эйлера и запишите соответствующую цепочку включений.
в) Пусть K — множество квадратов, P — множество прямоугольников, R — множество параллелограммов. Изобразите соотношения между этими множествами с помощью кругов Эйлера и запишите соответствующую цепочку включений.

750

ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

Дано множество $A = \{a; b; c; d\}$.
1) Укажите какое-нибудь подмножество множества A, содержащее один элемент. Сколько всего одноэлементных подмножеств у множества A?
2) Укажите какое-нибудь подмножество множества A, содержащее 3 элемента. Сколько всего таких подмножеств?
3) Сравните ответы на первые два вопроса и сделайте вывод.
4) Дано множество $\{a; b; c; d; e\}$.
Сколько у него подмножеств, содержащих один элемент? А можете ли вы без перебора сказать, сколько у этого множества подмножеств, содержащих 4 элемента?

49 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

ВЫ УЗНАЕТЕ

- Что такое пересечение и объединение множеств
- В чём состоит математический смысл понятия «классификация»

В рассказе Конан Дойля «Пять апельсиновых зёрнышек» знаменитый сыщик Шерлок Холмс должен был установить название одного парусника. Об этом судне он знал лишь то, что в январе 1883 г. оно было в Пондишире, в январе 1885 г. — в Данди, а сейчас стояло в Лондоне. Сравнив списки парусников, находившихся в указанное время в указанных местах, Шерлок Холмс установил, что только американское судно «Одинокая звезда» входило в каждый из них. В результате преступление было раскрыто.

Если говорить математическим языком, то сыщик, имея три множества, построил новое, содержащее их общие элементы. Оказалось, что это новое множество состоит всего из одного элемента.

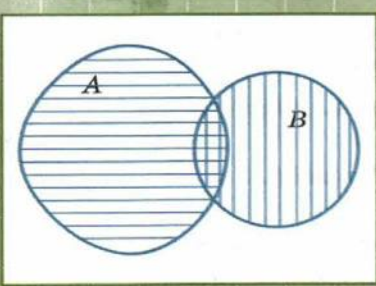
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ В математике часто приходится получать с помощью специальных операций из данных множеств новые множества.

> **Множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из данных множеств, называется их пересечением.**
> **Множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из данных множеств, называется их объединением.**

Пересечение множеств записывают с помощью символа $\cap$, а их объединение — с помощью символа $\cup$.

На рисунке ***12.3*** левый круг изображает множество A, правый круг — множество B. Вся заштрихованная область — это множество $A \cup B$, а область, заштрихованная дважды, — это множество $A \cap B$.

> С термином «пересечение» вы не раз встречались при изучении геометрии: например, когда находили общие точки двух прямых, прямой и окружности и т. д. Именно из геометрии этот термин пришёл в теорию множеств, но здесь он используется не только для геометрических объектов.



12.3

Приведём примеры.

1. Пусть $A = \{2;\ 4;\ 6\}$ и $B = \{4;\ 6;\ 8;\ 10\}$, тогда $A \cap B = \{4;\ 6\}$ и $A \cup B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$.

2. Пусть A — множество целых чисел и B — множество дробных чисел. Тогда $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = Q$.

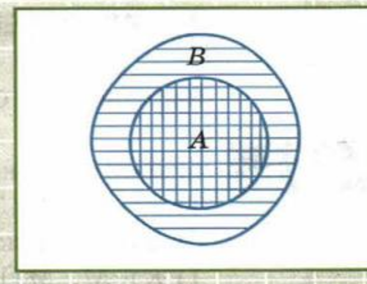
3. Найдём пересечение и объединение множества натуральных чисел и множества целых чисел:

$$\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N} \text{ и } \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}.$$

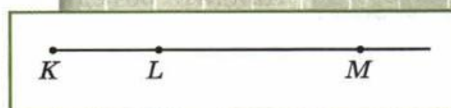
Вообще если множества A и B таковы, что $A \subset B$, то $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$ (рис. ***12.4***).

4. Пересечение множества всех треугольников и множества правильных многоугольников есть множество равносторонних треугольников.

5. Посмотрите на рисунок ***12.5***. Объединение отрезка KL и луча LM есть луч KM.



12.4



12.5

РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА Возьмём два подмножества множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$: множество чётных чисел и множество нечётных чисел. Эти множества общих элементов не имеют; в самом деле, любое натуральное число либо чётное, либо нечётное. Объединением этих множеств является всё множество натуральных чисел. Если множество нечётных чисел обозначить буквой A, а множество чётных чисел — буквой B, то можно записать:

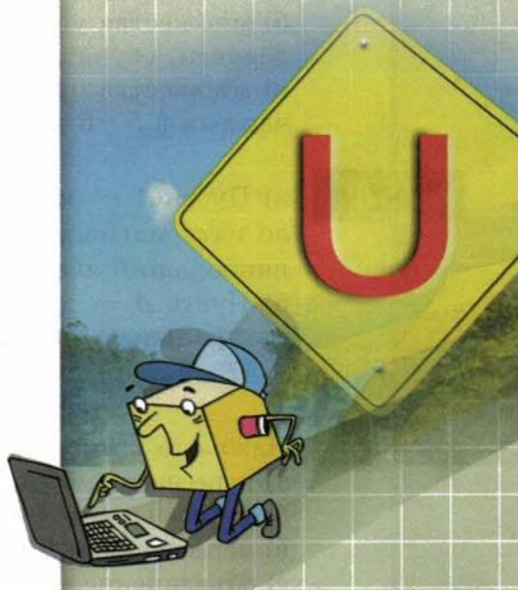
$$A \cap B = \varnothing \text{ и } A \cup B = \boldsymbol{N}.$$

Говорят, что множества чётных и нечётных чисел составляют **разбиение** множества $\boldsymbol{N}$. Подмножества, составляющие разбиение, обычно называют **классами**. Таким образом, мы имеем разбиение множества натуральных чисел на два класса — чётных и нечётных чисел.

Можно указать и другие разбиения множества $\boldsymbol{N}$, например по остаткам от деления на 3. Это разбиение составляют три множества: множество чисел, кратных 3; множество чисел, дающих при делении на 3 в остатке 1; множество чисел, дающих при делении на 3 в остатке 2. Так, числа 3, 6, 9, ... принадлежат первому из указанных классов; числа 4, 7, 10, ... — второму классу; числа 5, 8, 11, ... — третьему. Любое натуральное число принадлежит одному из этих подмножеств множества $\boldsymbol{N}$, и общих элементов они не имеют.

Разбиение множества на непересекающиеся подмножества составляет основу *классификаций* объектов, применяемых в самых различных областях человеческой деятельности.

Например, ботаники делят деревья на лиственные и хвойные. Библиотекари классифицируют книги при составлении каталогов. При составлении алфавитного каталога все книги разбиваются на подмножества книг, фамилии авторов которых начинаются с буквы A, с буквы $Б$ и т. д. Такой каталог (да ещё при наличии компьютера) позволяет даже в очень большой библиотеке легко отыскивать нужную книгу.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют пересечением множеств A и B? Приведите примеры.
- Что называют объединением множеств A и B? Приведите примеры.
- Приведите примеры разбиения множества на классы из математики и из какой-либо другой области.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

751 а) Даны множества: $A = \{2; 3; 8\}$, $B = \{2; 3; 8; 11\}$, $C = \{5; 11\}$. Найдите:
1) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$; 2) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$.
б) Даны множества: $K = \{a; b; c\}$, $M = \{e; f\}$, $P = \{b; c; e\}$. Найдите:
1) $K \cap M$, $M \cap P$, $K \cap P$; 2) $K \cup M$, $M \cup P$, $K \cup P$.

752 Найдите объединение и пересечение множеств:
а) $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$; б) $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.
Указание. Запишите ответ с использованием символов $\cup$ и $\cap$.

753 Опишите словами множество, которое является пересечением:
а) множества шестиклассников некоторой школы и множества отличников этой школы;
б) множества учащихся начальных классов некоторой школы и множества девочек, обучающихся в этой школе;
в) множества предметов, изучаемых в начальной школе, и предметов, изучаемых в 5—6 классах.

754 а) Пусть A — множество натуральных делителей числа 18, B — множество натуральных делителей числа 24. Запишите множество $A \cap B$. Укажите наибольший элемент этого множества. Как его называют?
б) Пусть A — множество натуральных чисел, кратных 4, B — множество натуральных чисел, кратных 6. Назовите несколько элементов множества $A \cap B$. Укажите наименьший элемент этого множества. Как его называют?

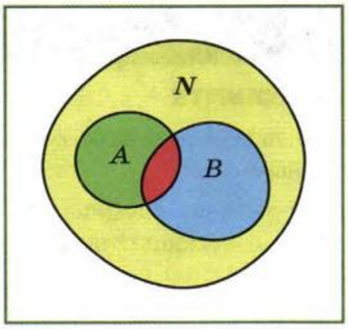
755 Назовите несколько элементов множества, которое является:
а) пересечением множества чисел, кратных 2, и множества чисел, кратных 5;
б) пересечением множества нечётных чисел и множества чисел, кратных 5;
в) пересечением множества чисел, кратных 2, и множества чисел, кратных 4;
г) объединением множества чисел, кратных 3, и множества чисел, кратных 9.

756 Пусть A — множество натуральных чётных чисел, не превосходящих 10, B — множество натуральных нечётных чисел, не превосходящих 10, C — множество простых чисел, не превосходящих 10. Найдите множество:
а) $B \cap C$; б) $A \cap C$; в) $A \cap B$.

757 1) Пусть A — некоторое множество. Закончите равенство:
а) $A \cap \varnothing = \ldots$; б) $A \cup \varnothing = \ldots$.
2) Какие свойства арифметических действий напоминают эти свойства операций объединения и пересечения множеств?

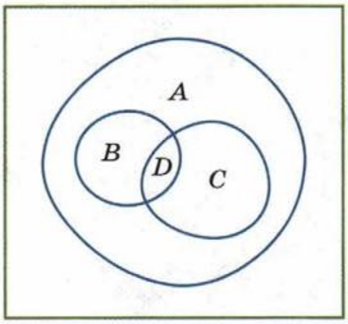
758 1) Какое из двух множеств является подмножеством другого:
а) A или $A \cup B$; б) A или $A \cap B$?

2) Закончите равенство, в котором большими буквами обозначены некоторые множества:
а) $(A \cup B) \cap A = ...$; б) $(A \cap B) \cup B = ...$.
Подсказка. Воспользуйтесь рисунком ***12.3***.



12.6

759 На рисунке ***12.6*** большой круг изображает множество натуральных чисел ***N***, а два малых — его подмножества: *A* — множество чисел, делящихся на 2, *B* — множество чисел, делящихся на 3. Большой круг разбивается малыми на четыре области (они закрашены разными цветами). Какие числа соответствуют каждой из этих областей? Приведите примеры.



12.7

760 1) Рассмотрите рисунок ***12.7***. Пусть *A* — множество параллелограммов, *B* — множество прямоугольников, *C* — множество ромбов. Множество каких четырёхугольников обозначено буквой *D*?
2) Закончите предложение:
а) всякий прямоугольник является ... ;
б) всякий ромб является ... ;
в) всякий квадрат является ... .

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИЙ

761 а) Придумайте несколько различных классификаций множества учащихся вашего класса.
б) Приведите пример классификации множества треугольников.

762 Сколько классов содержит разбиение множества натуральных чисел по остаткам от деления на 4? Какому классу принадлежит число 100? 50? 43? 17? Приведите свои примеры чисел, относящихся к каждому классу.

763 Постройте разбиение множества натуральных чисел, используя два признака: чётность и кратность числу 5.
Вам поможет следующая таблица:

Класс	Числа	
	чётные	кратные 5
A	+	+
B	+	−
C	−	+
D	−	−

Дайте словесное описание каждого класса и приведите примеры относящихся к нему чисел.
Подсказка. *A* — множество чётных чисел, кратных 5.

50

РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

ВЫ ВСПОМНИТЕ

- Какие задачи называют комбинаторными
- Приём решения комбинаторных задач с помощью перебора всех возможных вариантов

Чтобы осуществить перебор при решении комбинаторных задач, часто удобно вводить условные обозначения. Например, если в задаче речь идёт о красных и зелёных шарах, то можно ограничиться только первыми буквами *К* и *З*. Такую замену объектов их условными обозначениями называют *кодированием*.

ЗАДАЧА О ТУРИСТСКИХ МАРШРУТАХ Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трёх городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?

Обозначим города буквами В, Р и Ф. Тогда код каждого маршрута будет состоять из этих трёх букв, взятых в разном порядке.

Если сначала посетить Венецию, то затем можно поехать или в Рим, или во Флоренцию. Если вторым посетить Рим, то третьей будет Флоренция; получаем маршрут ВРФ. Если второй будет Флоренция, то третьим будет Рим; получаем маршрут ВФР. Начав маршрут с Рима, получим ещё два варианта: РВФ, РФВ. Наконец, начав с Флоренции, получим варианты ФВР, ФРВ.

Таким образом, существует 6 вариантов маршрута:

ВРФ РВФ ФВР
ВФР РФВ ФРВ

Если отвлечься от сюжета этой задачи и сформулировать её в терминах теории множеств, то она будет звучать так: «Дано множество, содержащее три элемента. Сколькими способами можно *упорядочить* это множество, т. е. сколькими способами можно расположить один за другим его элементы?» Решив задачу о маршрутах, вы узнали, что таких способов шесть. И теперь вы можете дать ответ на вопрос любой задачи с той же *математической моделью*.
Например: сколько можно составить трёхзначных чисел из цифр 2, 4, 8, используя каждую цифру только один раз?
В дальнейшем вы узнаете формулу, с помощью которой можно путём простых вычислений получать ответ на вопрос о том, сколькими способами можно упорядочить множество, содержащее любое конечное число элементов.

ЗАДАЧА О РУКОПОЖАТИЯХ При встрече восемь приятелей обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

Дадим каждому из приятелей номер от 1 до 8. Тогда каждое рукопожатие можно закодировать двузначным числом. Например, двузначное число 47 — это рукопожатие между приятелями с номерами 4 и 7.

Ясно, что среди кодов рукопожатий у нас не появится, например, число 33 — это означало бы, что один из друзей пожал руку самому себе. Договоримся также, что из чисел, кодирующих одно и то же рукопожатие (например, 68 и 86), мы будем выбирать меньшее.

Коды рукопожатий естественно выписывать в порядке возрастания, как это сделано на полях.

Подсчитаем число кодов:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28.$$

Всего было сделано 28 рукопожатий.

12 13 14 15 16 17 18 — 7
23 24 25 26 27 28 — 6
34 35 36 37 38 — 5
45 46 47 48 — 4
56 57 58 — 3
67 68 — 2
78 — 1

Эту задачу тоже можно рассмотреть с позиции теории множеств. В самом деле, восемь приятелей — это множество, в котором 8 элементов. Пара приятелей, обменивающихся рукопожатием, — это его подмножество, содержащее 2 элемента. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно выяснить, сколько у данного множества существует двухэлементных подмножеств.

ЗАДАЧА О ТЕАТРАЛЬНЫХ ПРОЖЕКТОРАХ Театральную сцену освещают четыре прожектора: белый, красный, зелёный, жёлтый. Каждый включается и выключается по отдельности. Сколько имеется вариантов освещения сцены? (Будем считать вариантом освещения и случай, когда все прожекторы выключены.)

Введём обозначения: б, к, з, ж. Найдём с помощью перебора все возможные варианты освещения:

1) все прожекторы погашены	—	1 вариант
2) горит один прожектор	б к з ж	4 варианта
3) горят два прожектора	бк бз бж кз кж зж	6 вариантов
4) горят три прожектора	бкз бкж бзж кзж	4 варианта
5) горят четыре прожектора	бкзж	1 вариант

Общее число вариантов: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

В переводе на язык теории множеств эта задача звучит так: «Сколько всего подмножеств у множества из 4 элементов?» Путём перебора мы выяснили, что у такого множества имеется 16 подмножеств. А в математике есть формула, позволяющая определять число подмножеств любого конечного множества по числу его элементов.

Комбинаторные задачи занимали умы математиков на протяжении тысячелетий. Ими увлекались ещё учёные Древней Греции. А как область научных знаний комбинаторика сформировалась в XVII в. Сам термин «комбинаторика» впервые был введён в работе немецкого математика Готфрида Лейбница «Об искусстве комбинаторики» (1666 г.).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Постройте дерево возможных вариантов к задаче о туристских маршрутах.
- Сформулируйте на теоретико-множественном языке задачи 764, 769, 776.

УПРАЖНЕНИЯ

ЗАДАЧИ, ПОХОЖИЕ НА ЗАДАЧУ О ТУРИСТСКИХ МАРШРУТАХ

764 Государственные флаги некоторых стран состоят из трёх горизонтальных полос разного цвета. Сколько существует различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосами? Выпишите их все.

765 Витя, Толя и Игорь купили вместе интересную книгу и решили читать её по очереди. Выпишите все варианты такой очереди. Сколько есть вариантов, в которых Игорь на первом месте? Витя не на последнем месте?

766 Запишите все возможные трёхзначные числа, которые можно составить из цифр 3, 4, 5, используя каждую из них только один раз. Какие из них делятся:
а) на 2; б) на 5; в) на 3; г) на 6?

767 Слово, полученное из данного слова перестановкой букв (но необязательно имеющее смысл), называют его анаграммой: например, «нос» и «сно» — анаграммы слова «сон». Выпишите в алфавитном порядке все анаграммы слов: а) «нос» и «dog»; б) «мама» и «дама».
Сравните количество анаграмм слов в каждой паре слов. Как бы вы объяснили получившийся результат?

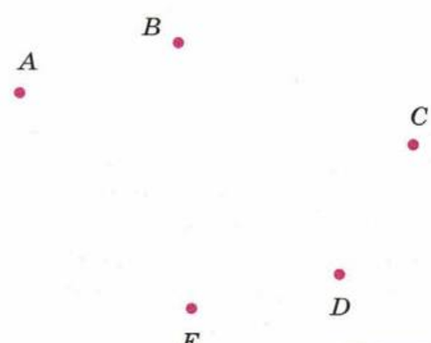
768 Поэт-модернист написал стихотворение, в котором первая строка — «Хочу пойти гулять куда-нибудь», а остальные строки все разные и получены из первой перестановкой слов. Какое наибольшее количество строк может быть в этом стихотворении?
Подсказка. В строке 4 разных слова, закодируйте их цифрами. Записав стихотворение в закодированном виде, «переведите» его на русский язык.

ЗАДАЧИ, ПОХОЖИЕ НА ЗАДАЧУ О РУКОПОЖАТИЯХ

769 В турнире участвовали шесть шахматистов, и каждый из них сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

770 На рисунке ***12.8*** изображены пять точек. Каждые две точки соедините отрезком. Сколько всего получилось отрезков? Перечислите их.

771 а) Лучшие спортсмены в классе — Антон, Пётр, Борис, Володя, Коля. На соревнования по лёгкой атлетике нужно отправить двух мальчиков. Перечислите все варианты выбора участников соревнования.
Сколько этих вариантов?



12.8

б) Для участия в эстафете 2×100 м тоже нужно выбрать двух мальчиков из пяти, обязательно указав, кто побежит первым, а кто — вторым. Перечислите все варианты выбора участников соревнования в этом случае. Сколько этих вариантов?

772 На районной олимпиаде по математике оказалось шесть победителей. Однако на областную олимпиаду можно отправить только двоих.
а) Сколько существует вариантов выбора двух кандидатов?
Подсказка. Дайте каждому победителю номер от 1 до 6.
б) Сколько существует вариантов, если один из шести ребят признан лучшим и он обязательно будет участвовать в областной олимпиаде?

773 К переправе одновременно подошли пять человек. Лодочник сказал, что в его лодке поместятся только два пассажира.
а) Сколькими способами можно выбрать двоих пассажиров из пяти?
б) Сколько существует способов выбора пассажиров, если одного из них необходимо срочно отправить на другой берег в больницу?
в) Предположим, что лодочник отвёз двоих пассажиров и вернулся за оставшимися. Сколькими способами можно выбрать того, кому придётся остаться ещё раз?

774 Два курьера фирмы должны забрать почту из четырёх филиалов, причём каждый успеет съездить только в два филиала из четырёх. Сколькими способами они могут распределить между собой поездки?
Подсказка. Достаточно подсчитать число способов, которыми один курьер может выбрать два филиала из четырёх.

775 а) Четыре друга собрались на футбольный матч. Но им удалось купить только три билета. Сколькими способами они могут выбрать тройку счастливцев? Как удобнее перебирать: тройки тех, кто пойдёт, или тех, кто не пойдёт?
б) Из шести кандидатов нужно составить команду для участия в гонках на четырёхместных байдарках. Сколько существует вариантов для выбора четвёрки участников соревнования и сколько для выбора пары запасных? Ответьте на оба вопроса, проведя только один перебор.

ЗАДАЧИ, ПОХОЖИЕ НА ЗАДАЧУ О ТЕАТРАЛЬНЫХ ПРОЖЕКТОРАХ

776 Танцевальная студия объявила дополнительный набор девочек 10–12 лет. На просмотр пришли четыре девочки. Сколько вариантов отбора новеньких у руководителя студии?

777 Сколькими способами можно разложить три разные по достоинству монеты в два кармана?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

1 Приведите примеры конечных множеств; бесконечных множеств.

2 Придумайте пример множества, которое является пустым.

3 Как читаются записи: $10 \in \boldsymbol{N}$, $8{,}5 \notin \boldsymbol{Z}$, $\frac{22}{7} \notin \boldsymbol{Q}$? Верны ли эти утверждения?

4 1) В каком случае множество A называют подмножеством множества B? Проиллюстрируйте это определение на кругах Эйлера.

2) Какое из множеств является подмножеством другого:
а) $\boldsymbol{N}$ или $\boldsymbol{Q}$; б) $\boldsymbol{Q}$ или $\boldsymbol{Z}$?

3) Приведите примеры конечных и бесконечных подмножеств множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$.

5 1) Какое множество называют объединением множеств A и B? пересечением множеств A и B? Дайте иллюстрации на кругах Эйлера.
2) Найдите объединение и пересечение множеств $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{2, 3, 5, 7\}$.
3) Найдите объединение и пересечение множества чисел, кратных 5, и множества чисел, кратных 10.

6 Приведите примеры классификаций.

7 1) Решите комбинаторную задачу:
а) Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 6 и 9, если каждую из них разрешается использовать только один раз?
б) Продаются воздушные шарики пяти цветов. Мама разрешила Феде купить два разных шарика. Сколько вариантов для выбора есть у Феди?

2) Приведите примеры комбинаторных задач, которые имеют ту же математическую модель, что и задачи, приведённые выше.

ОТВЕТЫ

Глава 1

6. г) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{4}{3}$. **12.** Зоя, Галя, Вера, Оля. **25.** а) $4\frac{1}{2}$; б) 9; в) $6\frac{1}{70}$; г) $\frac{9}{80}$. **28.** 3) На 2 дня. **29.** За 28 ч. **30.** а) 1; б) $1\frac{2}{3}$; в) 12; г) $\frac{1}{50}$. **33.** а) $\frac{5}{18}$; б) $\frac{7}{1000}$; в) $\frac{5}{13}$; г) $2\frac{1}{2}$. **39.** 18 страниц. **40.** 26 девочек. **42.** б) 30 м. **43.** 96 листов. **48.** Второй стрелок. **62.** 72 кг. **63.** 1104 р. **65.** 72 км. **69.** в) 6,3 км; 2,7 км.

Глава 2

76. а) $\angle 3 = 29^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 151^\circ$. **78.** а) $\angle COK = \angle DOM = 101^\circ$, $\angle KOB = 47^\circ$, $\angle BOD = 32^\circ$; б) $\angle 1 = \angle 4 = 38^\circ$, $\angle 2 = 91^\circ$, $\angle 3 = 51^\circ$. **84.** а) Четыре; б) два угла по 120° и два угла по 60°. **88.** $\angle 5 = \angle 2 = \angle 6 = 38^\circ$, $\angle 3 = \angle 4 = \angle 7 = \angle 8 = 142^\circ$. **89.** $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 110^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$. **107.** Пересекает отрезки DB и CD. **108.** Два решения: 8 см и 2 см. **109.** а) 6 см, 8 см; б) 6 см, 4 см; в) 3 см, 4 см. **110.** а) Диагональ; б) самый длинный — диагональ AC, самый короткий — ребро BC. **111.** а) KO; б) AB; AD; в) KO.

Глава 3

120. 18 десятичных дробей. **121.** в) 0,02; 0,05; 0,14; 0,17. **125.** в) 0,123 км; 0,45 км; 0,6 км; 0,075 км; 0,01 км. **126.** б) 2 кг 325 г; 4 кг 250 г; 3 кг 500 г. **127.** б) 8,23 дм; 72,06 дм; 20,7 дм; 13,46 дм. **133.** а) Нельзя; б) можно; 0,0112; в) можно; 0,01875; г) нельзя. **135.** $\frac{6}{24}$; $\frac{14}{35}$; $\frac{36}{48}$. **137.** а) $1\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{3}{10}$; г) $1\frac{2}{5}$; д) $\frac{3}{100}$; е) 15. **140.** в) $\frac{2}{5}$ ч = 0,4 ч; г) $\frac{1}{4}$ ч = 0,25 ч; ж) $\frac{7}{12}$ ч; з) $\frac{7}{10}$ ч = 0,7 ч. **141.** б) $2\frac{1}{2}$ ч = 2,5 ч; г) $1\frac{2}{3}$ ч. **142.** а) Да; 3,100 = 3,1. **145.** б) 3,43 кг; 5,08 кг. **147.** ж) $1{,}99 < 10{,}9$; з) $7{,}0191 < 7{,}1$; и) $2{,}44 > 2{,}404$. **150.** б) $10{,}1 < 10{,}16 < 10{,}2$; г) $0{,}007 < 0{,}0073 < 0{,}008$. **151.** г) $3{,}99 > 3{,}909 > 3{,}9009 > 3{,}099$. **155.** а) 9; б) 0; в) 8; 9; г) 0; 1; 2. **157.** а) $\frac{1}{3} < 0{,}5$; б) $\frac{1}{7} < 0{,}4$; в) $0{,}75 < \frac{4}{5}$; г) $0{,}25 = \frac{1}{4}$; д) $\frac{4}{9} > 0{,}4$; е) $\frac{1}{25} > 0{,}03$. **158.** а) $\frac{37}{500} < 0{,}7 < \frac{3}{4}$; б) $0{,}125 < 0{,}13 < \frac{29}{200}$.

Глава 4

161. д) 8,37; е) 2,64. **162.** а) 19,21; б) 2,32; в) 110,97; г) 29,896; д) 178,834; е) 51,34. **164.** в) 0,28; г) 2,9; д) 0,091; е) 3,08. **165.** в) 0,14; г) 5,29; д) 2,955; е) 15,09. **166.** а) 87,3; б) 61,84; в) 27,96; г) 39,08. **167.** а) 17,59; б) 122,38; в) 17,172. **168.** а) $a = 6{,}87$; б) $b = 3{,}7$; в) $a = 21{,}38$. **171.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{2}{35}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$. **172.** а) 3,22; б) 0,17; в) 2,11; г) 1,03; д) 1,31; е) 3,49. **173.** а) 1,5; б) 1,006; в) 0,6. **174.** а) 12 кг; б) 2,8 кг. **175.** а) 7,95 л; б) 34,2 см. **176.** а) 1,3 км. **177.** а) На 0,35 м; б) на 8 га. **179.** Канарейка — 9,4 г, попугай — 20,5 г, щегол — 15,7 г. **187.** а) 8,5 кг; б) 6,3 м.

190. а) 4 млн 845 тыс. р.; б) 126 тыс. р. **191.** а) Деление на 10; б) умножение на 100. **193.** а) Значения выражений равны; б) значение второго выражения меньше; в) значения выражений равны; г) значение второго выражения больше. **200.** а) 21,73; б) 15,9; в) 1,632; г) 0,312; д) 7,93; е) 8,528; ж) 10,403; з) 10,414; и) 0,329. **201.** а) 0,041; б) 0,00021; в) 0,0246. **204.** а) 0,8; 0,1; 0,03; б) 0,4; 0,2; 0,5. **205.** 2) 6 цифр; 10 цифр. **206.** а) 21,3; б) 14,31; в) 0,94; г) 154,33; д) 45,3; е) 33; ж) 1; з) 1; и) 1. **209.** Поместится. **213.** д) 1; е) 6,6. **214.** а) 1,632; б) 158; в) 4,96; г) 2,064; д) 2,275; е) 6,15. **215.** а) 2,31; б) 0,09; в) 1,28; г) 2,56; д) 6; е) 4. **216.** а) 0,1; б) 0,02; в) $\frac{1}{30}$; г) 0,9; д) $\frac{5}{6}$; е) 1,5; ж) 0,012; з) 0,97. **222.** а) 0,475; б) 0,72; в) 0,875; г) 0,4375. **227.** а) 0,3 кг; по 1,2 кг; б) 0,8 кг и 0,5 кг. **228.** а) 20,8 кг и 22,5 кг; б) 0,22 кг — груша и 0,405 кг — яблоко. **229.** а) 1,05 кг; б) 2,5 кг. **230.** 6,76 см^2. **234.** а) 22,25; б) 61,6; в) 0,054; г) 2,05; д) 277,5; е) 0,016. **237.** а) 20 шагов; б) 8 таблеток. **238.** а) 76 км/ч; б) 1,5 ч. **239.** а) 36 р.; 62,5 р.; б) 3,5 кг; 0,45 кг. **240.** а) 9 кусков; б) 10 бутылок. **241.** а) 12 рейсов; б) 7 полотенец. **242.** 0,275 кг. **243.** 1) Второе, в 10 раз; 2) первое, в 10 раз; 3) первое, в 100 раз; 4) второе, в 100 раз. **247.** а) 200 м; б) 1,5 км. **248.** а) $\frac{1}{4}$; 0,4; $\frac{2}{3}$; б) 0,5; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$. **249.** а) 8; б) 28. **250.** а) В коробке 25 кг, в банке 3 кг; б) щенок весит 2,2 кг, котёнок весит 0,88 кг. **251.** а) 6 юбок; б) 8,4 м. **255.** 1) 10 км; 15 км; 2) через 2,5 ч. **256.** Через 2 ч 15 мин. **257.** а) 1,5; б) $4\frac{2}{15}$; в) $\frac{7}{12}$; г) 2,37. **264.** 0,31 м; 31 см. **265.** 69,68 м^2; 70 м^2. **269.** а) Наибольшая дробь 3,274; наименьшая дробь 3,265; б) 8,6549. **271.** а) 23,33; б) 0,31; в) 2,33; г) 1,67. **272.** а) Примерно 1 м 8 см; б) примерно 1 кг 205 г.

Глава 5

274. 12 см. **276.** Через центр окружности. **283.** Центры таких окружностей находятся на двух прямых, параллельных данной прямой и расположенных от неё на расстоянии 3 см. **284.** На прямой, проходящей через точку M перпендикулярно данной прямой. **289.** 2,5 см и 5,5 см. **290.** а) 8 см и 2 см; б) 2,5 см и 5 см. **292.** а) AP = 3 см, BP = 7 см; б) AP = 1 см, BC = 7 см. **296.** а) 10 см; б) 8 см; в) 5 см; г) 0 (окружности концентрические). **297.** 4; 3; 2; 1. **307.** 2) а) Нельзя; б) можно; в) нельзя. **308.** Сторона, равная 7 см. **309.** Два треугольника (со сторонами 2, 5, 6 см и 3, 5, 6 см). **312.** а) Вершинами треугольной пирамиды; длина каждого ребра 4 см; б) 1 + 3 + 6 = 10 ядер. **316.** Отрезки OC и OA. **318.** 24 см; 15 см. **319.** а) 6 точек касания; 6 см; б) нельзя. **320.** 10 см; 10 см. **321.** 4 · 4 · 4 = 64 шара; 2 · 2 · 2 = 8 шаров.

Глава 6

334. 102 урока и 68 уроков. **335.** 1 кг 200 г. **337.** 2. **338.** а) 10 пятиклассников; б) 52 учащихся; в) 39 учащихся; г) на 6 человек. **339.** 44 куска. **342.** В первом. **343.** Во второй банке. **346.** В 5 раз; $\frac{1}{5}$. **348.** 2) 15 м; 120 м; 3) 50 см. **350.** 10,4 м. **353.** Увеличится; 15 см. **354.** 8,4 м. **371.** а) 147 см; б) 330 заявлений. **373.** 36 девочек и 44 мальчика. **374.** 4500 р. **376.** 200 лампочек. **377.** 4. **381.** 1520 р. и 2700 р. **384.** 240 млн человек. **391.** а) 23 % детей и 77 % взрослых; б) 10 %. **392.** а) Какао — 80 %, сахара — 20 %;

б) 89 % железа, 5 % олова, 6 % цинка. **394.** а) $\frac{3}{5}$; 60 %; б) 30 % — по теме «Авиация» и 70 % — по теме «Автомобили». **395.** а) На 8 %; б) на 15 %. **396.** а) На 15 %; б) 125 %. **399.** а) 55 %; б) 183 %.

Глава 7

401. а) $7(a + b)$; б) $10 + xy$; г) $m - (2 + n)$; д) $2ab$. **405.** $7a$, $5c$, $6a + 2c$, $ax + cy$. **409.** в) $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. **413.** б) $a + 1 = b$, $b - 1 = a$, $b - a = 1$. **415.** г) $\frac{2}{3}$; 1; 6; $6\frac{2}{3}$. **416.** в) 0; г) $\frac{7}{12}$. **417.** а) 6; г) 5. **418.** а) 150; в) 0,4. **422.** 10; 20; 25. **429.** 1) $0{,}1x + 7$; 2) $(0{,}1x + 7)n$; 3) $0{,}1xm + (0{,}1x + 7)n$. **430.** $a - cn$. **431.** а) $2a + b + c$; б) $5m$. **433.** 1) 36 дм^2. **435.** 3) $c = P - a - b$, или $c = P - (a + b)$. **436.** а) $P = 2x + 2y$, или $P = 2(x + y)$; б) $P = 2x + 2y + 2a$, или $P = 2(x + y + a)$. **437.** а) 2,4 м^2; б) 4 м^2. **438.** б) $a = \frac{P - 2b}{2}$, или $a = \frac{P}{2} - b$. **439.** 2) $a = \frac{V}{bc}$. **441.** 2) $C = am$; 3) $m = \frac{C}{a}$; $a = \frac{C}{m}$. **442.** 1) $T = 0{,}13S$; 2) 1040 р.; 1625 р. **443.** 1) $P = 25(a - c)$, или $P = 25a - 25c$. **444.** б) ≈47 см; ≈31 м. **445.** б) ≈113 см^3; ≈4 м^3. **449.** 1) а) 12,6 см; в) 6,3 см; 2) а) 25,1 см^2; б) 0,8 см^2; в) 9,4 см^2. **450.** ≈260 м; ≈4460 м^2. **452.** 344 см^2. **460.** а) 3,5; г) 4; е) 18. **465.** б) 12 см и 24 см. **466.** б) 22 и 37. **469.** б) $10(x + 15) = 200$, где x — задуманное число. **471.** а) $\frac{2x - 15}{10} = 0$. **472.** а) $3x = x + 8$, где x — возраст Андрея.

Глава 8

473. Нет. **476.** N, W, R. **478.** 4 перегибания. **485.** Нет, нет, да, нет. **490.** 3. **491.** 3. **494.** а) 20 см; б) 10 см; в) 10 см. **495.** а) 17 см; б) 16 см. **506.** A и C_1, B и D_1, C и A_1, D и B_1. **507.** Фигура 1 имеет центр симметрии; фигура 2 — оси симметрии. **512.** Прямая должна проходить через точку O и центр симметрии фигуры.

Глава 9

524. а) +11; б) −11; в) −86; г) +71. **527.** а) +1; б) −2; в) −8; г) +5; д) +3; е) −3. **538.** б) $-2000 < -150$; г) $-101 > -102$; е) $-310 > -1003$. **540.** б) −11 и −10. **542.** а) 0, 1, 2; в) −19, −18, −17, −16, −15, −14, −13, −12, −11. **543.** 1) б) −154, −130, −21, 19, 32. **548.** 2) а) −13; г) 0; е) −7. **549.** а) −1; г) 0; е) 3; з) −5. **554.** а) −15; б) −26; в) −35; г) 20; д) 60; е) 0; ж) −50; з) −16. **557.** а) 8; б) 5. **560.** в) 4; г) 2; д) 30; е) 10. **561.** а) 0; б) 6275; в) −1210; г) −8840. **563.** а) −15; б) −25; в) 56; г) −51. **569.** д) −662; е) 512; ж) −49; з) 36; и) −211. **571.** в) 31; г) −29. **572.** а) −20; г) −13; д) 1; и) −6. **576.** г) −4; д) 6; е) −47. **577.** а) 20; б) 4; в) −21; г) −100. **580.** а) 9; б) 0. **581.** а) −405; б) −155; в) −45; г) −205. **585.** 1) а) −600; б) 120; в) 150; д) −100. **593.** д) −1; е) 0; ж) −1; з) 1. **595.** а) 59; в) 8; д) 6; з) 18; и) −2. **597.** а) 16; б) −8; в) 0; г) −6. **598.** а) 18; б) 2; в) 450.

Глава 10

602. а) 10,1; б) −3,6; в) $-\frac{3}{7}$; г) −6,2; д) 1,4; е) $\frac{1}{20}$. **603.** а) −34; б) −15; в) 57; г) 60. **605.** а) $x = -7\frac{2}{3}$; б) $x = 2{,}8$; в) $x = -1{,}5$; г) $x = 100$. **609.** $L(-0{,}9)$, $K(-0{,}7)$, $H(-0{,}5)$, $G(-0{,}3)$, $F(-0{,}1)$, $A(0{,}1)$, $B(0{,}3)$, $C(0{,}5)$, $D(0{,}7)$, $E(0{,}9)$.

612. а) B; б) B; в) A; г) B; д) на одинаковом расстоянии; е) B. **618.** а) -10; б) $-8{,}7$; в) $-6{,}9$; г) $-0{,}9$; д) $-4\frac{1}{2}$; е) $-\frac{5}{7}$. **620.** а) $a < 0$, $c > 0$, $b > 0$; $a < c$, $a < b$, $b > c$; б) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; $a > c$, $a > b$, $b < c$. **621.** 4. **624.** а) $|-3| = |3|$; б) $|50| < |-100|$; в) $|4{,}3| > |-2{,}4|$; г) $\left|-\frac{3}{4}\right| > \left|-\frac{1}{5}\right|$. **626.** а) $-10 < 0 < 23$; б) $-1{,}8 < 0 < 1{,}8$; в) $-3{,}2 < 1{,}5 < 3{,}5$; г) $-2{,}7 < -1 < 1{,}3$. **627.** а) -54; -7; 0; 1; 12; б) -120; -40; 0; 40; 120; в) -7; $-2\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; 1; $1\frac{1}{4}$; г) $-0{,}1101$; $-0{,}101$; $-0{,}011$; $-0{,}01011$. **628.** а) -10 и 10; б) $-7{,}6$ и 7,6; в) 0; г) не существуют. **631.** а) $-2\frac{1}{3}$; б) $-\frac{7}{12}$; в) $-1\frac{1}{6}$; г) $-\frac{3}{4}$. **632.** а) $-9{,}5$; б) $-5\frac{1}{2}$; в) $-10{,}8$; г) $-3\frac{5}{6}$. **633.** а) 1,3; б) $-5{,}9$; в) $-8{,}4$; г) 10,3; д) $-4{,}6$; е) $-2{,}5$; ж) $-0{,}9$; з) $-4{,}1$. **635.** а) 7; б) 5,4; в) $-5{,}4$; г) $\frac{1}{3}$. **641.** а) $x = -14$; б) $x = -57$; в) $x = -20$; г) $x = -12{,}9$; д) $x = 3{,}9$; е) $x = 22{,}5$. **644.** а) -31; б) -2; в) $-7{,}8$; г) 5,7. **653.** а) $\frac{4}{9}$; б) $-\frac{8}{27}$; в) 0,04; г) $-0{,}125$. **654.** а) $(-6)^{10} > 0$; б) $(-15)^5 < 0$. **659.** а) $-1{,}5$; б) -38; в) $\frac{1}{4}$. **660.** а) $x = -1{,}36$; б) $x = -37{,}5$; в) $x = 0{,}09$; г) $x = -14$. **664.** а) $-1{,}9$; б) $-3{,}6$; в) 1; г) $-4{,}4$. **666.** а) -110; б) -4. **679.** А2, Б4, В3, Г1. **680.** А2, Б3, В4, Г1. **682.** $D\,(-6; -3)$; $P = 26$ ед., $S = 40$ кв. ед.

Глава 11

687. 30,2 см; $P = 2(a + b)$, где P — периметр параллелограмма, a и b — длины его сторон. **690.** 1; 2; 2. **694.** 34 см; $P = 4a$, где P — периметр ромба, a — длина его стороны. **695.** 5 ромбов, 9 параллелограммов. **696.** 9 см; 60°. **707.** 60 см; 48 см; $P = na$, где P — периметр правильного n-угольника, a — длина его стороны. **716.** 6 см^2. **717.** 25 кв. ед. **718.** 1) а) 3 см и 4 см; 12 см^2; б) 4 см и 5 см; 20 см^2. **719.** а) 1) 14 см^2; 2) 4,5 см^2; б) 1) 7,5 кв. ед.; 2) 8 кв. ед. **720.** $S = \frac{1}{2}ab$; а) 6 см^2; б) 13,5 см^2. **721.** 12 кв. ед. **722.** 13,5 кв. ед. **723.** 25 см^2, это квадрат. **727.** а) 4; б) 5; в) 6. **728.** а) Боковых рёбер 5, всего 15; боковых граней 5, всего 7; 10 вершин. **730.** а) 1000 вершин, 1000-угольная призма; не существует; б) 11-угольная призма; не существует; в) 20-угольная призма; существует. **731.** а) 12-угольная пирамида; б) 5-угольная призма. **732.** 1) а) 90 см; б) 90 см; 2) $l = n(a + 2b)$. **733.** а) $l = 4a + 8b$; б) $S = 2b^2 + 4ab$. **734.** а) 105 см^3; б) 1296 см^3; в) 2100 см^3. **735.** а) $V = abc + (x - c)yb$; б) $V = \frac{1}{2}abc$. **736.** 8 частей; объём наибольшей части 343 см^3, объём наименьшей части 27 см^3.

Глава 12

743. а), б), г), е) Бесконечным; в), д) конечным. **744.** а) Конечным; б), в), г) бесконечным. **746.** 2) 4. **754.** а) Наибольший элемент — число 6; наибольший общий делитель чисел 18 и 24; б) наименьший элемент — число 12; наименьшее общее кратное чисел 4 и 6. **757.** 1) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$; 2) свойства нуля при умножении и сложении чисел: $a \cdot 0 = 0$; $a + 0 = a$. **758.** 2) а) $(A \cup B) \cap A = A$; б) $(A \cap B) \cup B = B$. **768.** 24 строки. **769.** 15 партий. **770.** 10 отрезков. **771.** а) 10; б) 20. **772.** а) 15; б) 5. **773.** а) Десятью способами; б) четыре способа; в) тремя способами. **774.** Шестью способами. **776.** 16. **777.** Восемью способами.

Учебное издание

Серия «Сферы»

Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна
Рослова Лариса Олеговна
Суворова Светлана Борисовна

Математика

Арифметика. Геометрия
6 класс

Учебник для общеобразовательных организаций
с приложением на электронном носителе

Руководитель Центра «Сферы» *А.В. Сильянова*
Ответственный за выпуск *Н.В. Сафонова*
Редакторы *Н.В. Сафонова, В.В. Черноруцкий*
Художественное оформление *А.П. Асеева, А.М. Драгового, С.Г. Куркиной*
Художественный редактор *Ю.С. Асеева*
Технический редактор *С.Н. Терехова*
Компьютерная вёрстка *Г.В. Дорониной, Д.Ю. Герасимова*
Дизайн обложки *О.В. Поповича, А.М. Драгового*
Иллюстрации *А.М. Драгового, Г.М. Драговой, Г.В. Дорониной, С.Г. Куркиной*
Корректор *Н.И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 24.03.14.
Формат $84 \times 108^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 14,96. Доп. тираж 15 000 экз. Заказ № 37524 (L-Sm).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru; http://www.smolpk.ru

Математика

СФЕРЫ

ЛИНИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ «СФЕРЫ» ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ:

— МАТЕМАТИКА. Арифметика. Геометрия. 5 класс

— МАТЕМАТИКА. Арифметика. Геометрия. 6 класс

УМК **«МАТЕМАТИКА. Арифметика. Геометрия»** включает:

- Учебник с приложением на электронном носителе (CD-ROM)
- Тетрадь-тренажёр
- Задачник
- Тетрадь-экзаменатор
- Поурочное тематическое планирование
- Поурочные методические рекомендации
- Рабочие программы
- Сайт интернет-поддержки www.spheres.ru

ISBN 978-5-09-033042-8